

[I]

ア	イ	ウ	エ
$-a$	$a^2 - b$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{3}$

オ	カ	キ
$\frac{8}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$

ク	ケ	コ
$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4\sqrt{3}}{27}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$

[II]

$$(1) \quad a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (n+1)a_{n+1} - na_n \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n$$

ここで $a_1 = 1$ より、 $a_n = 1 \cdots \cdots$ (答)

$$S_n = na_n = n \cdot 1 = n \cdots \cdots$$
(答)

$$(2) \quad a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{n+3}{3}a_{n+1} - \frac{n+2}{3}a_n$$

$$\Leftrightarrow na_{n+1} = (n+2)a_n$$

より、 $n \geq 1$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \cdots \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot a_1 = \frac{(n+2)!}{2n!} \cdot 2 = (n+2)(n+1)$$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = n(n+1)$$

上式は $n=1$ でも成立する。よって、一般項は

$$a_n = n(n+1) \cdots \cdots$$
(答)

$$S_n = \frac{n+2}{3}a_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \cdots \cdots$$
(答)

[Ⅲ]

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\{(4,0,0) + (0,8,0) + (0,0,4)\} = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

よって、Gの座標は $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ……(答)

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} \quad (k > 0) \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{k}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{OD} \quad (\because \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD})$$

平面 ABD 上に点 P があることから

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{2k}{3} = 1 \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = (1, 2, 1) \quad \text{よって点 P の座標は } (1, 2, 1) \text{ ……(答)}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PD}| \cos \angle OPD$$

ここで、 $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP} = (-1, -2, -1)$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP} = (-1, -2, 1)$ より

$$\cos \angle OPD = \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PD}|} = \frac{(-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} \text{ ……(答)}$$

$$(4) \quad \angle OPD < 180^\circ \text{ より } \sin \angle OPD > 0 \text{ なので}$$

$$\sin \angle OPD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle OPD} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって $\triangle OPD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OP \cdot PD \cdot \sin \angle OPD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5} \text{ ……(答)}$$