

[I]

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

(2)

ク	ケ	コ	サ	シ	ス
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+2}$	$\sqrt{2}$

[II]

$$(1) P^{-1} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 実際計算すると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (P^{-1})^2AP^2 = \begin{pmatrix} 1 & ac^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などにより、 $D_n = \begin{pmatrix} 1 & ac^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることが予想される。この予想を n についての帰納法で示す。

$n = 1$ の場合は上の通り成立する。 $n = k$ で成立したとする。すなわち、

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & ac^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であると仮定する。このとき、 $D_{k+1} = P^{-1}D_kP$ なので、

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ac^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ac^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $n = k + 1$ でも成立する。

以上により、すべての n について $D_n = \begin{pmatrix} 1 & ac^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(4) $d_n = ac^n$ であり、さらに $0 < c < 1$ なので、 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{ac}{1-c}$

[III]

(1) $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$ であり、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ は一次独立なので、

$$\begin{cases} p=0 \\ q=1-t \\ r=t \end{cases}$$

である。

(2) P は三角形 ABC の内部にあるので、ある正の実数 α, β で $\alpha + \beta < 1$ が存在して、 $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ と書ける。故に、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{a} + \alpha(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + \beta(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) \\ &= (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となるので、 $p+q+r=1$ かつ $p, q, r > 0$ が必要条件であることがわかる。逆にこれを満たすような p, q, r が取れたとすると、 $\alpha = q, \beta = r$ とすることによって、 $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ と書ける。従って求める条件は、

$$p+q+r=1 \text{ かつ } p, q, r > 0$$

である。

(3)(2) から、 $\overrightarrow{AP} = q\overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AC}$ であることがわかる。この式を変形して、

$$\overrightarrow{AP} = (q+r) \left(\frac{q}{q+r}\overrightarrow{AB} + \frac{r}{q+r}\overrightarrow{AC} \right)$$

として、線分 BC を、 $r:q$ に内分する点を Q とすれば、 $\overrightarrow{AP} = (q+r)\overrightarrow{AQ}$ であることがわかる。一方題意の3つの四面体は同じ高さを持つので、底面である三角形 ABP 、 BCP 、 CAP の面積比が求める体積比になる。従って、

$$\begin{aligned} \triangle ABP &= (q+r)\triangle ABQ \\ &= (q+r) \times \frac{r}{q+r} \triangle ABC \\ &= r\triangle ABC \\ \triangle CAP &= (q+r)\triangle CAQ \\ &= (q+r) \times \frac{q}{q+r} \triangle ABC \\ &= q\triangle ABC \end{aligned}$$

なので、 $V_1 : V_2 : V_3 = r : (1-r-q) : q = r : p : q$ である。

[IV]

(1) P は第一象限にあり、その x 座標と y 座標は負にはならない。 P の x 座標は、 $x^2 + x^2 \tan^2 \theta = 1$ を満たすから、 $x = \cos \theta$ を得る。従って、 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を得る。

一方、 Q も同様にして、 x 座標は $2x^2 \tan \theta = 1$ を満たすから、 $x = \sqrt{\frac{1}{2 \tan \theta}}$ となる。よって、 $Q\left(\sqrt{\frac{1}{2 \tan \theta}}, \sqrt{\frac{\tan \theta}{2}}\right)$ である。

(2) A の x 座標は $x^2 + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$ を満たす。これを変形して、 $2x^2 - 1 = 0$ を得る。 A は第一象限にあるから、 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。従って、 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となる。

(3) 右の図 (別ページ参照) で、 A から x 軸におろした垂線の足を S とおくことにすると、

$$S_1 = \triangle OAS + (\text{線分 } AS, QR, x \text{ 軸と } C_2 \text{ で囲まれる面積})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{1/(2 \tan \theta)}} \frac{1}{2x} dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \tan \theta \end{aligned}$$

(4) $\angle AOP = \frac{\pi}{4} - \theta$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 - \triangle OQR - (\text{扇形 } OAP) \\ &= \frac{1}{4} - \log \tan \theta - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \tan \theta}} \cdot \sqrt{\frac{\tan \theta}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \theta - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log \tan \theta \end{aligned}$$

(5) $S_3 = \frac{1}{2} \theta$ なので、

$$\frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log \tan \theta$$

である。これを解いて、 $\tan \theta = e^{-\pi/2}$ である。

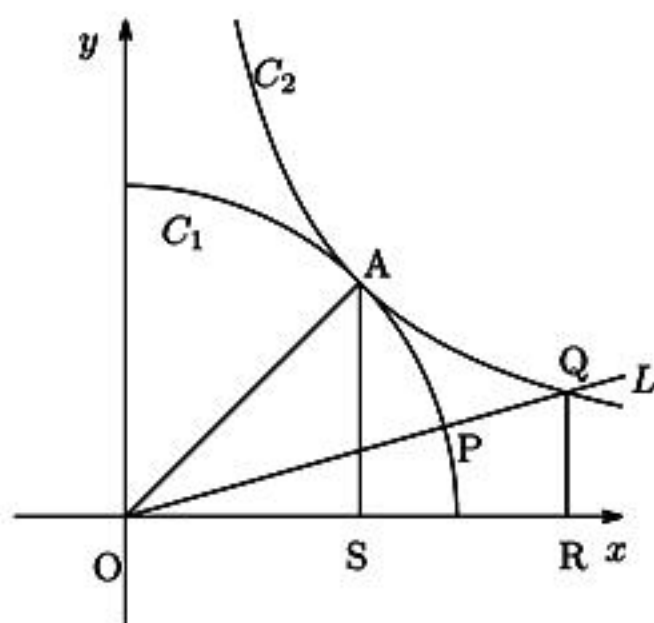


図1 [IV] の補助図