

[11]

ア: -2

イ: $-\frac{5}{2}$

ウ: -2

エ: $x = -\frac{5}{2}$

オ: $y = -2$

カ: -2

キ: 5

ク: -3

ケ: -9

コ: 1

サ: -1

シ: -6

ス: -3

セ: $-\frac{56}{25} < k \leq 0$

注. ・エとオは順不同。

・(カ,キ), (ク,ケ), (コ,サ), (シ,ス) の4組は順不同。

[II]

- (1) $y' = (k-1-x)e^x$ であるので、接線の式は

$$y = (k-1-a)e^a(x-a) + (k-a)e^a$$

$$\therefore y = (k-1-a)e^a x + (a^2 - ak + k)e^a \quad \cdots(\text{答})$$

- (2) 原点を通る条件は

$$(a^2 - ak + k)e^a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ak + k = 0 \quad \cdots(\text{答}) \quad (\because e^a > 0)$$

- (3) 題の条件は、(2)を満たす a の値が 1 つであること。

(2)を a の 2 次方程式と見て判別式を考えて

$$(-k)^2 - 4k = 0$$

$$\therefore k(k-4) = 0$$

$k \neq 0$ より、 $k_0 = 4 \quad \cdots(\text{答})$ と決まる。

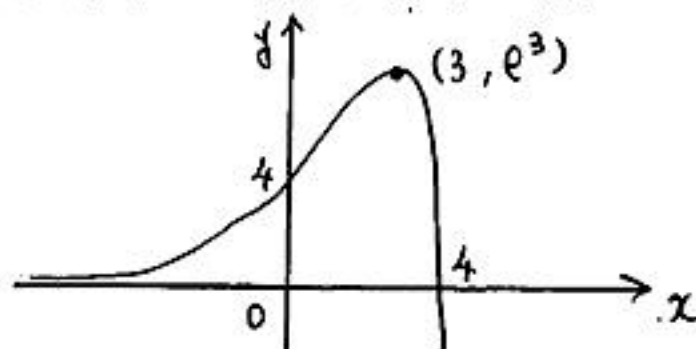
このとき(2)より $a = 2$ と決まるので、接線の式は(1)より

$$y = e^2 x \quad \cdots(\text{答})$$

- (4) $y' = (3-x)e^x$ である。極限まで入れた増減表は下の様。

x	$(-\infty)$		3		$(+\infty)$
y'		+	0	-	
y	(0)	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	$(-\infty)$

よってグラフの概形は下図。 $\cdots(\text{答})$



- (5) 囲んでいる範囲では I の方が下なので、

$$(\text{面積}) = \int_0^2 \{ (4-x)e^x - e^2 x \} dx$$

$$= \left[4e^x - (x-1)e^x - \frac{e^2}{2} x^2 \right]_0^2$$

$$= e^2 - 5 \quad \cdots(\text{答})$$

【Ⅲ】

(1) $Q(0, 2+d) \cdots$ (答)

(2) $Q(x, y)$ とおくと、

$$\begin{cases} t = x \\ 2s + d = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ s = \frac{y-d}{2} \end{cases}$$

今、 P が C 上 $\Leftrightarrow s^2 + t^2 = 1$ であるから、 Q の動く曲線の式は、

$$x^2 + \frac{(y-d)^2}{4} = 1 \cdots$$
(答)

これは $(0, d)$ 中心、短径 1、長径 2 の楕円であるから、囲まれる面積は 2π $\cdots$ (答)

(3) $(0, d)$ と x 軸の距離 ≤ 2 が条件で、

$$-2 \leq d \leq 2 \cdots$$
(答)

(4) $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、条件より $P_2(-\sin \theta, \cos \theta)$

よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= 3 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

である。 $\sin 2\theta$ の値域は $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ であるから、

$$\text{与式の最大値は } \frac{3}{2}、\text{最小値は } -\frac{3}{2} \cdots$$
(答)

[IV]

- (1) $\frac{dx}{dt} = \cos t (\neq 0), \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$ であるから、

$$l \text{ の傾き} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$$

よって l の式は、

$$y = \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha} (x - \sin \alpha) + \sin 2\alpha$$

$$\therefore y = \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha} x + \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \dots(\text{答})$$

- (2) OP の傾き $= \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$ であるから、

$\tan$ の加法定理より

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \frac{2 \cos \alpha - \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha}}{1 + 2 \cos \alpha \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha}} \right| \\ &= \left| \frac{2 \cos^2 \alpha - 2 \cos 2\alpha}{(1 + 4 \cos 2\alpha) \cos \alpha} \right| \end{aligned}$$

である。 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ を代入して整理して、

$$\tan \theta = \left| \frac{2 - 2 \cos^2 \alpha}{8 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} \right|$$

α の範囲において中身は正なので、

$$\tan \theta = \frac{2 - 2 \cos^2 \alpha}{8 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} \quad \dots(\text{答})$$

- (3) 条件は $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 - 2 \cos^2 \alpha}{8 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (8 \cos^2 \alpha - 3)}$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^2 \alpha - 3 = 2 \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 8(1 - \sin^2 \alpha) - 3 = 2 \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{8}$$

であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であるので、

$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{41}}{8} \quad \dots(\text{答})$$