

2006年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

[I] 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

(1) 関数

$$f(x) = x^3 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x^2 + (1 + \sqrt{6})x + \sqrt{2}$$

に対し $f(-\sqrt{2}) = \text{ア}$ であるから

$$f(x) = (x + \text{イ})(x^2 + \text{ウ}x + \text{エ})$$

である (ただし, イ は実数). よって, 方程式 $f(x) = 0$ の解は $x = \text{オ}, \text{カ}, \text{キ}$ である.

(2) 曲線 $C_1: y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ と曲線 $C_2: y = \sqrt{x^2+2} - \frac{3}{2}$ の2つの交点の座標はそれぞれ (ク , ケ) と (コ , サ) であり, すべての正の数 a に対し

$$\int_0^a \sqrt{x^2+2} dx = \text{シ} + \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

が成り立つことより, 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は ス である.

[II] 2次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

に対し, 次の各問に答えよ. ただし, $0 < c < 1$ である.

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(2) 行列の積 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $D_n = (P^{-1})^n A P^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, D_n を求めよ.

(4) 行列 D_n の (1, 2) 成分を d_n とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ を求めよ.

[III] 空間にある四面体の頂点 O, A, B, C に対し,

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とする. この空間の点 P をとり, $\overrightarrow{OP} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ と表すとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 点 P が線分 BC を $t : (1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点であるとき, p の値を求め, q, r を t で表せ.
- (2) 点 P が平面 ABC 上の $\triangle ABC$ の内部 (辺上の点は含まない) にあるための p, q, r の満たすべき条件を求めよ.
- (3) 点 P が平面 ABC 上の $\triangle ABC$ の内部 (辺上の点は含まない) にあるとする. 四面体 $OABP, OBCP, OCAP$ の体積をそれぞれ V_1, V_2, V_3 で表すとき, 体積比 $V_1 : V_2 : V_3$ を求めよ.

[IV] 原点 O を通る直線 $L : y = x \tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) および 2 つの曲線

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad C_2 : y = \frac{1}{2x} \quad (x > 0)$$

に対し, 次の各問に答えよ.

- (1) L と C_1, C_2 の交点をそれぞれ P, Q とする. 点 P と点 Q の座標を求めよ.
- (2) C_1 と C_2 の共有点を A とする. 点 A の座標を求めよ.
- (3) Q から x 軸に垂線を下ろし, x 軸との交点を R とする. 線分 AO, OR, RQ と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とする. S_1 を求めよ.
- (4) C_1 と C_2 と L で囲まれた図形の面積を S_2 とする. S_2 を求めよ.
- (5) C_1 と x 軸と L で囲まれた扇形の面積を S_3 とする. $S_2 = S_3$ のとき, $\tan \theta$ の値を求めよ.

以下余白