

2006年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

- [I] 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

関数 $y = -\frac{4x+3}{2x+5}$ のグラフを C で表す.

$$-\frac{4x+3}{2x+5} = \boxed{\text{ア}} + \frac{7}{2\left(x + \frac{5}{2}\right)}$$

と変形すると, C は $y = \frac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に イ だけ, y 軸方向に ウ だけ平行移動したものであり, したがって, その漸近線は エ と オ であることがわかる.

C 上の点 (x, y) で x, y が整数であるものの座標は (カ , キ), (ク , ケ), (コ , サ), (シ , ス) である. また, 直線 $y = kx - 2$ と C が共有点をもたない k の範囲は セ である.

- [II] $k \neq 0$ を定数とする. 曲線 $C: y = (k - x)e^x$ について次の各問に答えよ.

- (1) 曲線 C 上の点 $(a, (k - a)e^a)$ における接線の方程式を求めよ.
- (2) (1) の接線が原点を通るための k, a が満たすべき条件を求めよ.
- (3) 曲線 C の接線で原点を通るものがただ一本であるときの k の値を k_0 とし, その接線を ℓ とする. k_0 を求め, ℓ の方程式を求めよ.
- (4) (3) で得られる曲線 $C: y = (k_0 - x)e^x$ の概形を描け.
- (5) y 軸と (3) で得られる曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ.

[III] xy 平面で、原点 O を中心とする半径 1 の円 C 上を動く点 P の座標を (s, t) で表す.

$$\vec{a} = (0, 2), \quad \vec{b} = (1, 0), \quad \vec{c} = (0, d)$$

として、点 P の動きにつれて

$$\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}$$

を満たす点 Q が動く. このとき、次の各問に答えよ.

- (1) 点 P の座標が $(1, 0)$ のとき、対応する点 Q の座標 (x, y) を d を用いて表せ.
- (2) 点 P が C 上を動くとき、対応する点 Q の描く曲線の方程式を求め、その曲線の囲む図形の面積を求めよ.
- (3) (2) で求めた曲線が x 軸と共有点をもつための d の条件を求めよ.
- (4) $d = 0$ とする. 点 P_1 は $(1, 0)$ から、点 P_2 は $(0, 1)$ から同時に出発し、 C 上を反時計回りに同じ速さで動くとする. その速さは正で一定とし、 P_1, P_2 に対応する点を Q_1, Q_2 とする. このとき、内積 $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2}$ の最大値と最小値を求めよ.

[IV] xy 平面の曲線

$$C: x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{4}\right)$$

について次の各問に答えよ.

- (1) C 上の点 $P(\sin \alpha, \sin 2\alpha)$ における、曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) xy 平面の原点 O と C 上の点 $P(\sin \alpha, \sin 2\alpha)$ を結ぶ直線と接線 ℓ のなす角を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とするとき、 $\tan \theta$ を $\cos \alpha$ で表せ.
- (3) (2) で $\tan \theta = \tan \alpha$ を満たすとき、 $\sin \alpha$ の値を求めよ.

以下余白