

I

ア	-2
イ	2
ウ	$-(-3)^{n-1}$
エ	$3 \cdot 5^{n-1}$
オ	$\frac{1}{2} \{3 \cdot 5^{n-1} - (-3)^{n-1}\}$
カ	$\frac{1}{4} \{3 \cdot 5^{n-1} + (-3)^{n-1}\}$
キ	$\sqrt{2} + \sqrt{6}$
ク	45°
ケ	60°
コ	2

II

(1)

点A $(3a, 0)$, 点B $(0, 3a^2)$, 点C $(a, 4a^2)$ であるので, 直線ABは

$$\begin{aligned} y &= \frac{0 - 3a^2}{3a - 0}(x - 3a) + 0 \\ &= \underline{-ax + 3a^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

直線CDは

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a}(x - a) + 4a^2 \\ &= \underline{\frac{1}{a}x + 4a^2 - 1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

AB と CD の交点をEとする.

CE の長さは点と直線の距離の公式より

$$\frac{|a^2 + 4a^2 - 3a^2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

である. またABの長さは三平方の定理より,

$$\sqrt{9a^2 + 9a^4} = 3a\sqrt{a^2 + 1}$$

よって, $\triangle ABC$ の面積は,

$$3a\sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2} = \underline{3a^3} \quad (\text{答})$$

(3)

点D $(0, 4a^2 - 1)$ であるから,

$\triangle DBC$ の面積は, BD の長さが $3a^2 - 4a^2 + 1 = 1 - a^2$ より,

$$(1 - a^2) \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a(1 - a^2)$$

である. よって, 条件を満たす a は,

$$3a^3 = \frac{1}{2}a(1 - a^2)$$

$$7a^2 = 1$$

$$a > 0 \text{ より, } (\text{答}) \quad \underline{\frac{\sqrt{7}}{7}}$$

III

(1)

$$|\overrightarrow{OP}| = a, |\overrightarrow{OQ}| = b \text{ とする.}$$

PQ の長さが 1 であることから, $a^2 + b^2 = 1$ である.

また, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ である.

S は PQ を 1:2 に内分する点なので,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{3}$$

同様に T は PQ を 2:1 に内分する点なので,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}}{3}$$

となり, $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OT}$ は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OT} &= \frac{1}{9}(2|\overrightarrow{OP}|^2 + 5\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + 2|\overrightarrow{OQ}|^2) \\ &= \frac{2}{9}(a^2 + b^2) \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{9}(\text{答})}} \end{aligned}$$

(2)

$|\overrightarrow{OS}|, |\overrightarrow{OT}|$ はそれぞれ,

$$|\overrightarrow{OS}| = \frac{1}{3}\sqrt{4|\overrightarrow{OP}|^2 + 4\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OP}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4a^2 + b^2}$$

$$|\overrightarrow{OT}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + 4\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + 4|\overrightarrow{OQ}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 4b^2}$$

である. また,

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OT} = |\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{OT}|\cos\angle\text{SOT}$$

より, $\cos\angle\text{SOT}$ は,

$$\begin{aligned} \cos\angle\text{SOT} &= \frac{2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{9|\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{OT}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{4a^2 + 1 - a^2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{a^2 + 4 - 4a^2}} \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(3a^2 + 1)(-3a^2 + 4)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-9a^4 + 9a^2 + 4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-9(a^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}}} \end{aligned}$$

とでき, $a^2 = \frac{1}{2}$, また $a > 0$ より, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき, 最小となる.

$$\underline{\underline{(\text{答}) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ のとき, 最小値 } \frac{4}{5}}}$$

(3)

$$(2) \text{ より } \cos\angle\text{SOT} = \frac{2}{\sqrt{-9a^4 + 9a^2 + 4}}$$

$$\angle\text{SOT} = \frac{\pi}{6} \text{ を代入して,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{2}{\sqrt{-9a^4 + 9a^2 + 4}} \\ \sqrt{-27a^4 + 27a^2 + 12} &= 4 \\ -27a^4 + 27a^2 + 12 &= 16 \\ 27a^4 - 27a^2 + 4 &= 0 \\ a^2 &= \frac{9 \pm \sqrt{33}}{18} \\ a &= \frac{1}{6}\sqrt{18 + 2\sqrt{33}}, \frac{1}{6}\sqrt{18 - 2\sqrt{33}} \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{\underline{(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{6}\sqrt{18 + 2\sqrt{33}}, 0\right), \left(\frac{1}{6}\sqrt{18 - 2\sqrt{33}}, 0\right)}}$$