

[I]

$$(1) x^2 - 2\sqrt{7}x - 2 = 0$$

$$x = \sqrt{7} \pm 3$$

$$\text{より, } p = \sqrt{7} + 3 \quad \dots(\text{ア})$$

$$2 < \sqrt{7} < 3 \text{ より}$$

$$p \text{ の整数部分 } a = 5 \quad \dots(\text{イ})$$

$$\text{小数部分 } b = \sqrt{7} - 2 \quad \dots(\text{ウ})$$

$$b^2 = 11 - 4\sqrt{7}$$

$$b^4 = 233 - 88\sqrt{7} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} b^4 + 88b - 7 &= 233 - 88\sqrt{7} + 88(\sqrt{7} - 2) - 7 \\ &= 50 \end{aligned} \quad \dots(\text{エ})$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}}(n+3) + \log_{\frac{1}{2}}(n-1) > -5$$

$$\text{真数条件より } n > 1 \quad \dots\text{①}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(n+3)(n-1) > -5$$

$$(n+3)(n-1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

よって

$$-7 < n < 5 \quad \dots\text{②}$$

$$\text{①, ② より } 1 < n < 5$$

$$n \text{ の 最大値は } 4 \quad \dots(\text{オ})$$

$$\text{最小値は } 2 \quad \dots(\text{カ})$$

$$(3) x + y + z = 10$$

10個のボールの間の9個のすき間から2箇所選んでしきりを置き, その左を x , 真ん中を y , 右を z に対応づけければよい。よって

$${}_9C_2 = 36 \text{ (個)} \quad \dots(\text{キ})$$

$x = 2y$ のとき, $3y + z = 10$ で, この式を満たす y, z の組は

$$(y, z) = (1, 7), (2, 4), (3, 1)$$

の3通り。よって 3個 $\dots(\text{ク})$

$x = y$ のとき, $2y + z = 10$ で, この式を満たす y, z の組は

$$y = 1, 2, 3, 4$$

に対応する4通り。

$x < y$ を満たす組と, $x > y$ を満たす組の個数は x と y の対称性により等しく

$$(36 - 4) \div 2 = 16 \text{ (個)} \quad \dots(\text{ケ})$$

$$[\text{II}] \quad (x, y) = (t \cos t, t \sin t) \quad (t > 0)$$

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t \cos t) = \cos t - t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t \sin t) = \sin t + t \cos t$$

よって

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)$$

(2) $t = 2k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のとき, C は x 軸上の正の部分にあるので, P_k の座標は $(2k\pi, 0)$ である。また, $t = 2k\pi$ のとき

$$\vec{v} = (1, 2k\pi)$$

なので, 接線 L_k の傾きは $2k\pi$ である。よって

L_k の方程式は $y = 2k\pi(x - 2k\pi)$ すなわち

$$y = 2k\pi x - 4k^2\pi^2$$

(3) L_k, L_{k+1} を連立して

$$2k\pi x - 4k^2\pi^2 = 2(k+1)\pi x - 4(k+1)^2\pi^2 \quad \text{より}$$

$$x = (4k+2)\pi \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2k\pi(4k+2)\pi - 4k^2\pi^2$$

$$= (4k^2 + 4k)\pi^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より k を消去して

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \pi^2$$

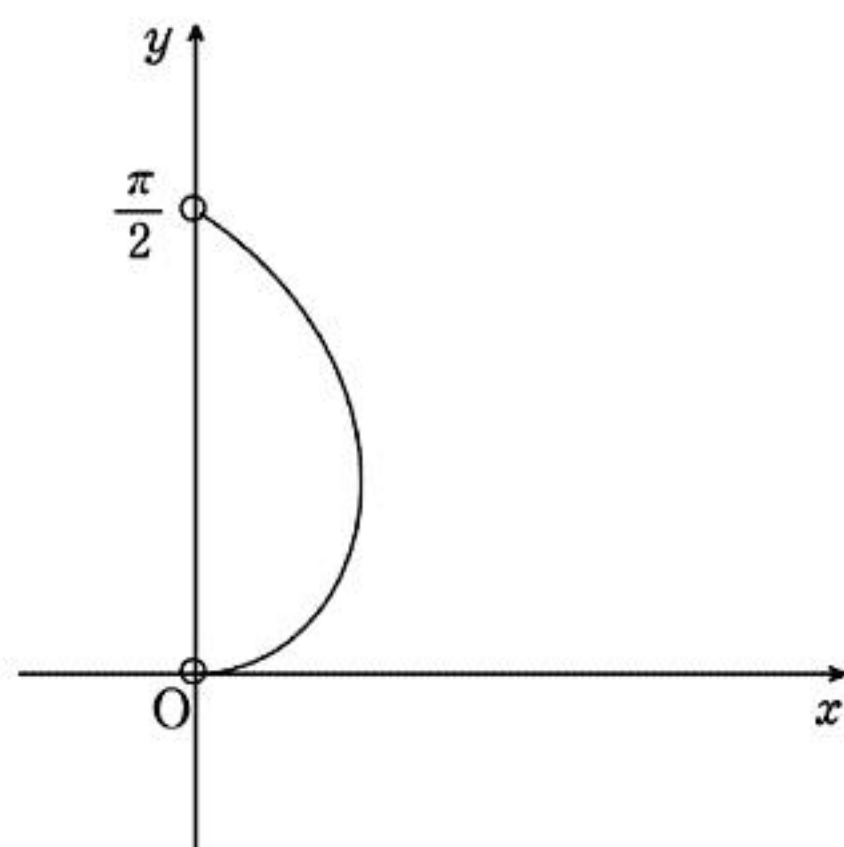
より Q_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) は上の放物線上にある。

$$(4) \quad t = 0 \quad \text{のとき} \quad (x, y) = (0, 0)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad (x, y) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t > 0 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

より, グラフの概形は下のようになる。



求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t (\sin t + t \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} \sin 2t + t^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^3}{48}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[III] (1) } CD &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^2 &= (\alpha C + \beta D)(\alpha C + \beta D) \\
 &= \alpha^2 C^2 + \alpha\beta CD + \alpha\beta DC + \beta^2 D^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで, } C^2 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^2 &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DC &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= O
 \end{aligned}$$

であることから,

$$A^2 = \alpha^2 C + \beta^2 D$$

(2) $CD = DC = O, C^k = C, D^k = D$ であることより

$$\begin{aligned}
 A^k &= (\alpha C + \beta D)^k \\
 &= \alpha^k C + \beta^k D
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$A = \alpha C + \beta D$ より

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & -2\alpha + 2\beta \\ \alpha - \beta & -\alpha + 2\beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{これより, } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$$

$$(4) \quad A^k = \alpha^k C + \beta^k D$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k-1}} - 1 & -\frac{1}{2^{k-1}} + 2 \\ \frac{1}{2^k} - 1 & -\frac{1}{2^k} + 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad y_k &= (1 \ 0) A^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2^{k-1}} - 1 \quad -\frac{1}{2^{k-1}} + 2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2^{k-2}} - 3
 \end{aligned}$$

より,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = -3$$

$$[\text{IV}] \quad f(x) = \sqrt{|1-x^2|} - x - 1 \quad (x > -1)$$

$$(1) \quad \sqrt{|1-x^2|} - x - 1 = 0$$

$$\iff \sqrt{|1-x^2|} = x+1$$

$$\iff |1-x^2| = x^2 + 2x + 1 \quad (x+1 > 0 \text{ より})$$

$-1 < x < 1$ のとき

$$1-x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$-1 < x < 1 \text{ より } x = 0$$

$x \geq 1$ のとき

$$x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

これは $x \geq 1$ に不適

以上より, $f(0) = 0$ なる x は

$$x = 0$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{|1-x^2| - (x+1)^2}{\sqrt{|1-x^2|} + x + 1}$$

$x > 1$ のとき,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 - (x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^2 - 1} + x + 1}$$

$$= \frac{-2x - 2}{\sqrt{x^2 - 1} + x + 1}$$

$$= \frac{-2 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{より, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-2}{1+1} = -1$$

(3) $-1 < x < 1$ のとき

$$f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ として, } -x = \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 = 1-x^2 \quad (x < 0)$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x > 1$ のとき

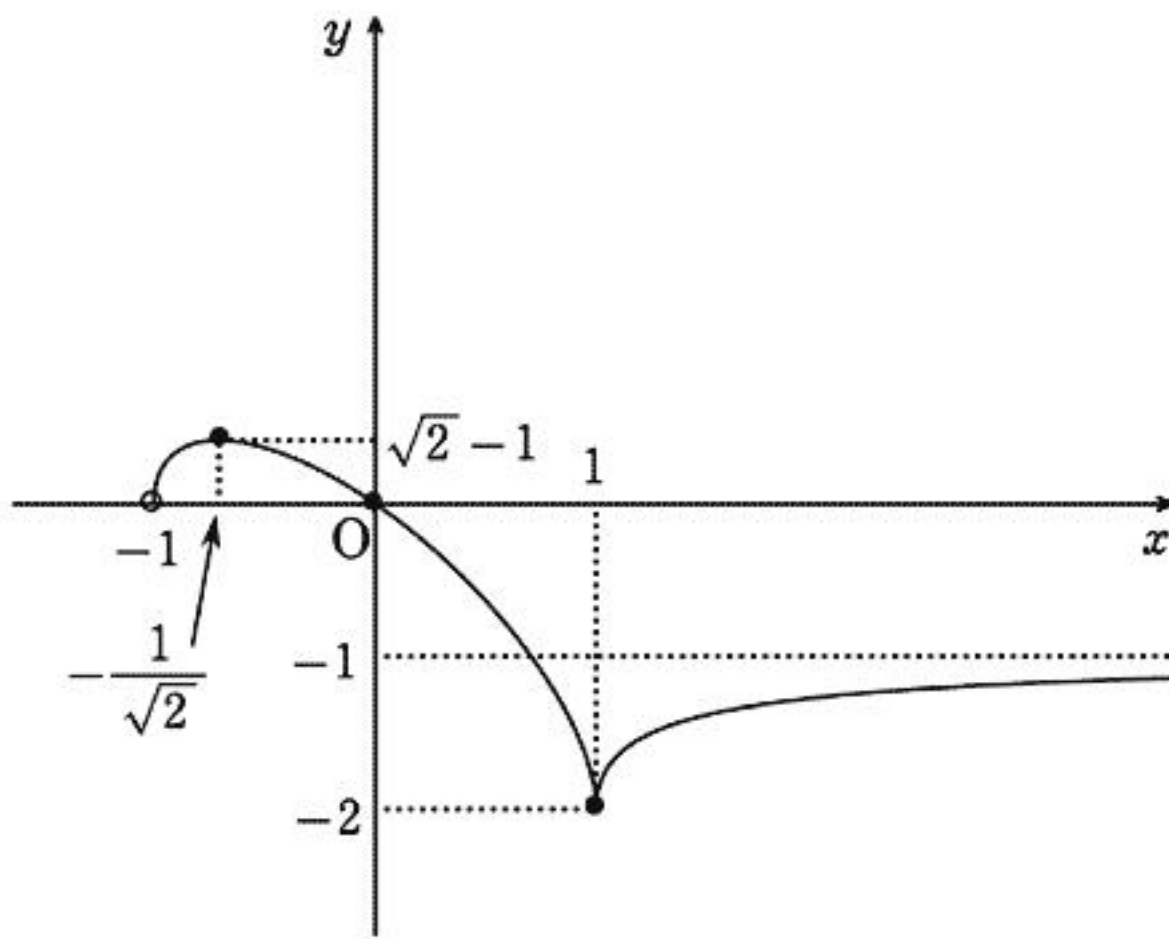
$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - x - 1$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 > 0$$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\nearrow$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

これより, $f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。



$$f(x) \text{ の最大値は } \sqrt{2}-1 \quad \left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{最小値は } -2 \quad (x = 1)$$

(4) 求める面積を S とすると

$$S = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a -f(x) dx$$

$-1 < x < 1$ の範囲で, $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x - 1$ なので

$$S = \int_{-a}^0 (\sqrt{1-x^2} - x - 1) dx + \int_0^a (-\sqrt{1-x^2} + x + 1) dx$$

$$= 2 \int_0^a x dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

$$= a^2$$