

〔 I 〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$	3	2	$p - \sqrt{p^2 - 2p + 4}$	$p + \sqrt{p^2 - 2p + 4}$

ク	ケ	コ	サ	シ	ス
$p - \sqrt{p^2 - 2p + 4}$	$p\sqrt{p^2 - 2p + 4} - p^2 + p - 2$	p	$p - 2$	$(p^2 - 2p + 4)^{3/2}$	$3\sqrt{3}$

(1) 条件から $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$, $\angle POQ = 30^\circ$ なので

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 = 1, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

(2) 直線と放物線の式を連立させて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= p(x - 1) + 2 \\ \therefore x &= p \pm \sqrt{p^2 - 2p + 4} \end{aligned}$$

放物線の導関数は $y' = x$ なので P における接線は

$$\begin{aligned} y &= x_1(x - x_1) + \frac{1}{2}x_1^2 \\ &= x_1x - p(x_1 - 1) - 2 \\ &= (p - \sqrt{p^2 - 2p + 4})x + p\sqrt{p^2 - 2p + 4} - p^2 + p - 2 \end{aligned}$$

R の座標は P と Q における接線の式を連立させた解なので,

$$\begin{cases} y = x_1x - p(x_1 - 1) - 2 \\ y = x_2x - p(x_2 - 1) - 2 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (p, p - 2)$$

線分 PQ 上に x 座標が p となる点 R' をとり, $\triangle PQR$ を $\triangle PRR'$ と $\triangle QRR'$ に分けて考える.

$R'(p, p(p - 1) + 2)$ であるから, $R'R = p^2 - 2p + 4$.

よって $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot R'R \cdot \{(p - x_1) + (x_2 - p)\} = (p^2 - 2p + 4)^{3/2}$$

最小値は $(p^2 - 2p + 4)^{3/2} = \{(p - 1)^2 + 3\}^{3/2}$ より $3\sqrt{3}$

〔 II 〕

(1) 等比数列の公比を r とすると

$$a_{n+1} + db_{n+1} = (1 + 2d)a_n + (8 + d)b_n = r(a_n + db_n)$$

$$\therefore d(1 + 2d) = 8 + d \Rightarrow d = \pm 2$$

(2) (1) より,

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2b_{n+1} = 5(a_n + 2b_n) \\ a_{n+1} - 2b_{n+1} = -3(a_n - 2b_n) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_n + 2b_n = 3 \cdot 5^{n-1} \\ a_n - 2b_n = -(-3)^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore a_n = \frac{3 \cdot 5^{n-1} - (-3)^{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{3 \cdot 5^{n-1} + (-3)^{n-1}}{4}$$

(3) (2) より,

$$c_n = \frac{1}{4b_n^2 - a_n^2} = \frac{1}{(2b_n + a_n)(2b_n - a_n)} = \frac{-5}{(-15)^n}$$

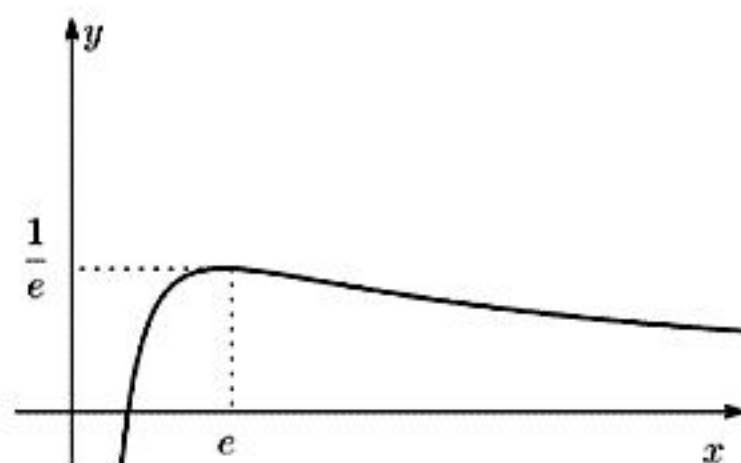
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{-15}} = \frac{5}{16}$$

〔 III 〕

(1)

$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ より, 増減表が以下のようなになるのでグラフは右図のようになる.

x	0	...	e	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)



(2) 明らかに $m \neq 1, n \neq 1$ なので両辺に対数を取って

$$n \log m = m \log n$$

ここで (1) より, $m < e < n$ であることがわかる. また, $m \neq 1$ と合わせると $m = 2$ しかありえない. このとき (1) より m と n は 1 対 1 で対応が取れるはずなので一つずつ当てはめると $n = 4$ が該当することが分かる.

以上のことから, 求める組み合わせは

$$(m, n) = (2, 4)$$

の 1 組だけである.

(3)

$$a_k = \int_1^{e^k} \frac{\log x}{x} dx = [(\log x)^2]_1^{e^k} - \int_1^{e^k} \frac{\log x}{x} dx = k^2 - a_k$$

$$\therefore a_k = \frac{k^2}{2}$$

(4)

$$\sum_{k=1}^N a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{12} N(N+1)(2N+1)$$

〔 IV 〕

(1) 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} = 2$$

$$\therefore AB = 2 \sin \gamma, \quad BC = 2 \sin \alpha, \quad CA = 2 \sin \beta$$

したがって

$$L = 2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

(2)

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot CA \sin \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

(3) $S = \frac{1}{2}LR$ より

$$R = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

(4) $\sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma$ より

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \gamma + 2 \sin^2 \alpha \cos \gamma \sin \gamma \\ &= \sin 2\alpha \sin^2 \gamma + (1 - \cos 2\alpha) \cos \gamma \sin \gamma \\ &= \sin \gamma (\cos \gamma - \cos(2\alpha + \gamma)) \end{aligned}$$

ここで γ は一定なので $2\alpha + \gamma = 180^\circ$, つまり $\alpha = \beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)$ のときに S は最大値 $\sin \gamma (\cos \gamma + 1)$ を取る.

(5) $\alpha = \beta$ より $\sin \gamma = \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ なので

$$\begin{aligned} R &= \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \\ &= 2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha) \\ &= -2 \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ のときに R は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる.