

2007年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のつ
いた の中に記入せよ。

- (1) 中心を O とし半径 1 の円に内接する正 12 角形の隣り合う 2 頂点を P, Q とすると

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \text{ア}, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \text{イ}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = \text{ウ}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{\text{エ}} - 1}{\sqrt{\text{オ}}}$$

である。

- (2) 直線 $y = p(x - 1) + 2$ と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ は異なる 2 点 P, Q で交わる。
 P の x 座標を x_1 , Q の x 座標を x_2 とし, $x_1 < x_2$ であるとする。
 $x_1 = \text{カ}$, $x_2 = \text{キ}$ である。放物線上の点 P における接線
の方程式は p を用いて表すと $y = \text{ク}x + \text{ケ}$ であり, P に
おける接線と Q における接線の交点 R の座標は (,)
である。 $\triangle PQR$ の面積は であり, その最小値は

〔Ⅱ〕 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 8b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。次の各問に答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n + db_n\}$ が等比数列となるような定数 d の値をすべて求めよ。
(2) 一般項 a_n, b_n を求めよ。
(3) 数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \frac{1}{4b_n^2 - a_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定めるとき, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を求めよ。

〔 III 〕 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) について次の各問に答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ である.

(2) $m^n = n^m$ ($m < n$) をみたす自然数 m, n の組をすべて求めよ.

(3) 自然数 k に対し, 積分 $a_k = \int_1^{e^k} f(x) dx$ を求めよ.

(4) (3) において, $\sum_{k=1}^N a_k$ を求めよ.

〔 IV 〕 半径 1 の円に内接する $\triangle ABC$ において

$$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\triangle ABC$ の周の長さ L を $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ で表せ.

(2) $\triangle ABC$ の面積 S を $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ で表せ.

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 R を $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ で表せ.

(4) γ が一定のとき, S の最大値とそのときの α, β を γ で表せ.

(5) $\alpha = \beta$ のとき, R を $\cos \alpha$ で表し, R の最大値を求めよ.