

[1]

(1) $a > 0$ とし、 $f(x) = ax^2 - 6\sqrt{2}x + a^2 - 11a + 28$ とおく。
 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を $D(a)$ とすると、
 $f(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$$\begin{aligned} \frac{D(a)}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (-3\sqrt{2})^2 - a(a^2 - 11a + 28) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^3 - 11a^2 + 28a - 18 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 - 10a + 18) &< 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)\{a - (5 - \sqrt{7})\}\{a - (5 + \sqrt{7})\} &< 0 \end{aligned}$$

$2 < \sqrt{7} < 3$ より、 $1 < 5 - \sqrt{7} < 5 + \sqrt{7}$ であり、
 $a - 1, a - (5 - \sqrt{7}), a - (5 + \sqrt{7})$ のうち、
 奇数個 (1 個または 3 個) が負になる $a(> 0)$ の値の範囲を求めて

$$0 < a < 1 \text{ または } 5 - \sqrt{7} < a < 5 + \sqrt{7}$$

である。
 $y = f(x)$ のグラフに関して、
 • x^2 の係数 $a > 0$ より下に凸の放物線
 • 軸 $x = \frac{3\sqrt{2}}{a}$ の位置 $\frac{3\sqrt{2}}{a} > 0$

であるから、2 次方程式 $f(x) = 0$ が負の解をもつ条件は

$$\begin{aligned} f(0) &< 0 \\ \Leftrightarrow (a - 4)(a - 7) &< 0 \\ \Leftrightarrow (0 <) 4 < a < 7 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$C : \begin{cases} x = t - 2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = -t^2 + 4t & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 2 < t < 4 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

① を $t = x + 2$ とし、②、③ に代入してパラメータ t を消去すると

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 2 \\ y = -(x + 2)^2 + 4(x + 2) \\ 2 < x + 2 < 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 2 \\ y = -x^2 + 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、曲線 C を x, y で表すと

$$y = -x^2 + 4 \quad (0 < x < 2)$$

である。 C 上の点 $P(a, b)$ ($b = -a^2 + 4, 0 < a < 2$) における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y - b &= -2a(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= -2ax + 2a^2 + b \\ \Leftrightarrow y &= -2ax + a^2 + 4 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} l \text{ の } y \text{ 切片} &= a^2 + 4 (> 0) \\ l \text{ の } x \text{ 切片} &= \frac{a^2 + 4}{2a} (> 0) \end{aligned}$$

であるから、 l, x 軸、 y 軸で囲まれる三角形の面積 $f(a)$ は

$$f(a) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}$$

$f(a)$ の $0 < a < 2$ における最小値を求める。

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{2(a^2 + 4) \cdot 2a \cdot a - (a^2 + 4)^2 \cdot 1}{a^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4a^2} (a^2 + 4)(3a^2 - 4) = \frac{1}{4} \left(a + \frac{4}{a} \right) \left(3a - \frac{4}{a} \right) \\ &= \frac{3}{4a^2} (a^2 + 4) \left(a + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(a - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ f''(a) &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{4}{a^2} \right) \left(3a - \frac{4}{a} \right) + \left(a + \frac{4}{a} \right) \left(3 + \frac{4}{a^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(3a + \frac{16}{a^3} \right) > 0 \end{aligned}$$

$0 < \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$ より、 $0 < a < 2$ における $f(a)$ の増減・凹凸は次のようになる。

a	(0)	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	(2)
$f'(a)$	$(-\infty)$	-	0	+	(4)
$f''(a)$		+			
$f(a)$	$(+\infty)$	↘	極小	↗	(8)

したがって、 $f(a)$ は $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最小になる。

[II]

- (1) 点 $A(0, 1, 0)$ と点 $B(1, 1+b, c)$ を結ぶ線分 AB を $t:1-t$ に内分する点が Q であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1+b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 1+bt \\ ct \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は $(t, 1+bt, ct)$ である。

- (2) 点 Q と x 軸の距離 $L(t)$ は、点 Q と点 $(t, 0, 0)$ の距離であるから

$$\begin{aligned}L(t) &= \sqrt{(1+bt)^2 + (ct)^2} \\ &= \sqrt{1+2bt+t^2} \quad (\because b^2+c^2=1)\end{aligned}$$

である。

- (3) 関数 $y = \sqrt{x}$ は増加関数であるから、 $\{L(t)\}^2 = f(t)$ の $0 \leq t \leq 1$ における最小を考える。

$$f(t) = t^2 + 2bt + 1 = \{t - (-b)\}^2 + (1 - b^2)$$

下に凸の放物線 $u = f(t)$ の軸 $t = -b$ の位置で場合分ける。

$b^2 + c^2 = 1$ より $|b| \leq 1$ を考慮に入れて

- (i) $-1 \leq b \leq 0$ のとき、 $0 \leq -b \leq 1$ より、
 $f(t)$ は $0 \leq t \leq -b$ で単調減少、 $-b \leq t \leq 1$ で単調増加であるから
 最小値 $f(-b) = 1 - b^2$
 (ii) $0 \leq b \leq 1$ のとき、 $-b \leq 0$ より、
 $f(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ で単調増加であるから
 最小値 $f(0) = 1$
 したがって

$$L(t) \text{ の最小値} = \begin{cases} \sqrt{1-b^2} & (-1 \leq b \leq 0) \\ 1 & (0 \leq b \leq 1) \end{cases}$$

である。

- (4) (1) の結果より、 $b^2 + c^2 = 1$ (..... ①) の下で
 線分 AB が x 軸と共有点をもつ
 すなわち

$$1 + bt = 0 \quad (\text{ ②}) \text{ かつ}$$

$$ct = 0 \quad (\text{ ③}) \text{ を満たす}$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad (\text{ ④}) \text{ なる実数 } t \text{ が存在する}$$

という条件を考える。

$$\text{③} \Leftrightarrow t = 0 \text{ または } c = 0$$

$t = 0$ のとき、② を満たさないのでは適さない。

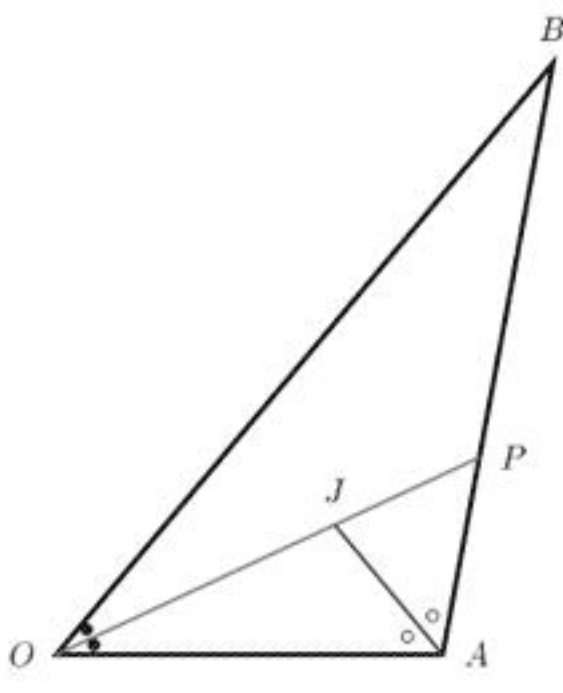
$c = 0$ のとき、① より $b = \pm 1$

(i) $b = 1$ のとき、② より $t = -1$ となり ④ を満たさない。

(ii) $b = -1$ のとき、② より $t = 1$ となり ④ を満たす。

ゆえに、求める b の値は $b = -1$ である。

[III]



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \\ |\vec{a}| &= 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = t \\ |\overrightarrow{AB}| &= |\vec{b} - \vec{a}| = p (> 0) \text{ とおく。}\end{aligned}$$

(1) OP は $\angle AOB$ の二等分線なので

$$AP : PB = OA : OB = 1 : 2$$

であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}p^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 5 - 2t \\ \therefore p &= \sqrt{5 - 2t}\end{aligned}$$

J は $\triangle OAB$ の内心であるから AJ は $\angle OAB$ の二等分線である。

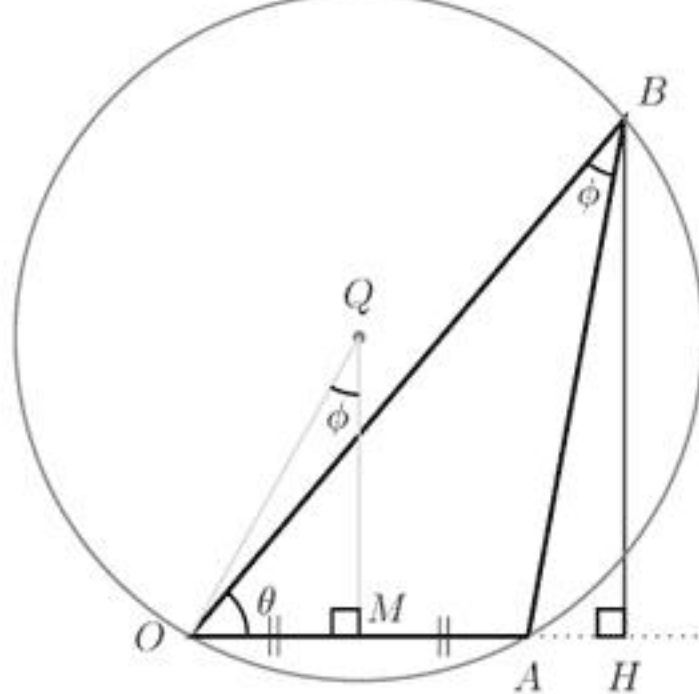
AP = $\frac{p}{3}$ より

$$OJ : JP = OA : AP = 3 : p$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ} &= \frac{3}{3+p} \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{3 + \sqrt{5 - 2t}} (2\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

である。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{p} \\ |\vec{a}| &= 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = t \\ |\overrightarrow{AB}| &= p, OQ = R \\ \angle AOB &= \theta, \angle OBA = \phi \text{ とおく。}\end{aligned}$$

(3) 点 B から直線 OA に垂線 BH を下ろす。

辺 OA の中点を M とすると、点 Q は外心であるから $QM \perp OA$

したがって、 $BH \parallel QM$ である。

$\overrightarrow{OH}$ は $\vec{b}$ を $\vec{a}$ 方向へ正射影したベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = t\vec{a} \\ \overrightarrow{HB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \\ &= \vec{b} - t\vec{a} \\ |\overrightarrow{HB}|^2 &= |\vec{b} - t\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{a}|^2 \\ &= 4 - t^2 \\ |\overrightarrow{HB}| &= \sqrt{4 - t^2}\end{aligned}$$

ゆえに、 $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \pm \frac{1}{|\overrightarrow{HB}|} \overrightarrow{HB} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} (\vec{b} - t\vec{a})\end{aligned}$$

である。

(4) $\vec{e}$ について、議論の都合により複号のうち $+$ の方をとるものとする。

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} (\vec{b} - t\vec{a})$$

MQ について $\overrightarrow{HB}$ の方向を正とする符号付き長さとする

$$MQ = OQ \cos \phi = R \cos \phi \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\text{正弦定理より } R = \frac{p}{2 \sin \theta} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$1 = |\vec{a}|^2 = |\vec{b} - \vec{p}|^2 = 4 + p^2 - 4p \cos \phi \text{ より}$$

$$\cos \phi = \frac{3 + p^2}{4p} \quad \dots\dots\dots ③$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{4 - t^2}}{2} \quad \dots\dots\dots ④$$

$$p^2 = 5 - 2t \quad \dots\dots\dots ⑤$$

②, ③ を ① に代入してできる式に ④, ⑤ を代入して

$$\begin{aligned}MQ &= R \cos \phi \\ &= \frac{p}{2 \sin \theta} \cdot \frac{3 + p^2}{4p} \\ &= \frac{3 + p^2}{8 \sin \theta} \\ &= \frac{4 - t}{2\sqrt{4 - t^2}} \\ \therefore \overrightarrow{MQ} &= \frac{4 - t}{2\sqrt{4 - t^2}} \vec{e}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{4 - t}{2\sqrt{4 - t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} (\vec{b} - t\vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{4 - t}{2(4 - t^2)} (\vec{b} - t\vec{a}) \\ &= \frac{1}{2(4 - t^2)} \left\{ 4(1 - t)\vec{a} + (4 - t)\vec{b} \right\}\end{aligned}$$

である。

[補足]

問題の誘導にしたがって上のように解いたが、 $\overrightarrow{OQ}$ は次のように考えた方が求めやすい。
2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立である (すなわち平行ではない) から、

$$\overrightarrow{OQ} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおける。辺 OB の中点 N とし、Q が M または N となる場合も含めて

$$\begin{cases} \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + y\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \left\{ x\vec{a} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \right\} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

より、 x, y についての連立方程式を解く。

[IV]

(1) n を 0 以上の整数に拡張して、 $f_0(x) = 1$ とする。

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \begin{cases} 1 & (n=0) \\ x^n(1-x)^n = \{x(1-x)\}^n & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \\ f_{n+1}(x) &= \{x(1-x)\}^{n+1} \\ f_{n+1}'(x) &= (n+1) \{x(1-x)\}^n \{(1-x) + x \cdot (-1)\} \\ &= (n+1)f_n(x)(1-2x) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

問題の条件より $g(x)$ を多項式として

$f_{n+1}'(x) = (n+1)f_n(x)g(x)$ を満たす。

x についての多項式として $n+1 \neq 0$, $f_n(x) \neq 0$ であるから

$$g(x) = 1 - 2x$$

である。

(2) $f_n(x)$ の定義により

$$f_{n+1}(x) = x(1-x)f_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \{x(1-x)\}^{n+2} \\ f_{n+2}'(x) &= (n+2)f_{n+1}(x)g(x) \\ f_{n+2}''(x) &= (n+2) \{f_{n+1}'(x)g(x) + f_{n+1}(x)g'(x)\} \\ &= (n+2) \left[(n+1)f_n(x)\{g(x)\}^2 + g'(x)f_{n+1}(x) \right] \\ &= (n+2) \left\{ (n+1)(1-2x)^2 f_n(x) - 2f_{n+1}(x) \right\} \\ &= (n+2) \left[(n+1)\{1-4x(1-x)\}f_n(x) - 2f_{n+1}(x) \right] \\ &= (n+2) \{ (n+1)f_n(x) - 4(n+1)f_{n+1}(x) - 2f_{n+1}(x) \} \\ &= -2(n+2)(2n+3)f_{n+1}(x) + (n+2)(n+1)f_n(x) \end{aligned} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

A_n, B_n を (x に依存しない) 定数として

$f_{n+2}''(x) = A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x) \\ = -2(n+2)(2n+3)f_{n+1}(x) + (n+2)(n+1)f_n(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\{A_n + 2(n+2)(2n+3)\}x(1-x) + \{B_n - (n+1)(n+2)\} \right] f_n(x) = 0$$

が成り立つ。

x についての多項式として、 $f_n(x) \neq 0$ であるから

$$\{A_n + 2(n+2)(2n+3)\}x(1-x) + \{B_n - (n+1)(n+2)\} = 0$$

これが恒等式であるから

$$A_n = -2(n+2)(2n+3), \quad B_n = (n+1)(n+2) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

である。

(3)

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

であるから

$$\begin{aligned} A_n I_{n+1} + B_n I_n &= A_n \int_0^1 f_{n+1}(x) dx + B_n \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \{A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x)\} dx \\ &= \int_0^1 f_{n+2}''(x) dx \\ &= \left[f_{n+2}'(x) \right]_0^1 \\ &= f_{n+2}'(1) - f_{n+2}'(0) \\ &= 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$(\because f_{n+2}'(x) = (n+2)f_{n+1}(x)g(x), f_{n+2}'(1) = f_{n+2}'(0) = 0)$$

である。

(4)

$$J_n = (2n+1)! I_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、 $J_{n+1} = (2n+3)! I_{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned} A_n I_{n+1} + B_n I_n &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(n+2)(2n+3)I_{n+1} &= (n+2)(n+1)I_n \\ \Leftrightarrow 2(2n+3)I_{n+1} &= (n+1)I_n \quad (\because n+2 > 0) \\ \Leftrightarrow 2(2n+3) \frac{J_{n+1}}{(2n+3)!} &= (n+1) \frac{J_n}{(2n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{2n+2} \cdot \frac{J_{n+1}}{(2n+1)!} &= (n+1) \frac{J_n}{(2n+1)!} \\ \Leftrightarrow J_{n+1} &= (n+1)^2 J_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

である。

(5)

$$J_0 = 1! I_0 = \int_0^1 dx = 1$$

であり、漸化式 ① により帰納的に

$$J_n = (n!)^2 J_0 = (n!)^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。したがって

$$I_n = \frac{J_n}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

である。