

答

(1) ア	$4x-1$	イ	x^2+x+1	ウ	$-2x^4-x^3+15x^2-4x-5$		
(2) エ	4	オ	1	カ	1	キ	-2

解答

(1) ア 因数定理より $f(1)=3, f(2)=7, f(-3)=7$ となる.

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割った商を $Q_1(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと, $f(x)=Q_1(x)(x^2-3x+2)+ax+b$ となる.

$$x=1, 2 \text{ を代入して, } \begin{cases} 3=a+b \\ 7=2a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \iff ax+b=4x-1.$$

イ $f(x)$ を x^3-7x+6 で割った商を $Q_2(x)$, 余りを px^2+qx+r とおくと, $f(x)=Q_2(x)(x^3-7x+6)+px^2+qx+r$

$$\text{となる. } x=1, 2, -3 \text{ を代入して, } \begin{cases} 3=p+q+r \\ 7=4p+2q+r \\ 7=9p-3q+r \end{cases} \iff \begin{cases} p=1 \\ q=1 \\ r=1 \end{cases} \iff px^2+qx+r=x^2+x+1.$$

ウ $f(x)$ が 4 次式であることを用いると,

$$f(x)=(cx+d)(x^3-7x+6)+x^2+x+1=cx^4+dx^3+(-7c+1)x^2+(6c-7d+1)x+(6d+1)$$

とおける. 問題の条件より,

$$-5=f(0)=6d+1 \iff d=-1, -4=f'(0)=6c-7d+1 \iff c=-2. \text{ よって, } f(x)=-2x^4-x^3+15x^2-4x-5.$$

(2) 逆行列の公式より

$$A^{-1}=\frac{1}{ab-6}\begin{pmatrix} b & -3 \\ -2 & a \end{pmatrix}. \text{これが}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\text{に等しいことから}$$

$$\frac{b}{ab-6}=\frac{-1}{2}, \frac{-3}{ab-6}=\frac{3}{2}, \frac{-2}{ab-6}=c, \frac{a}{ab-6}=d.$$

2 番めの式より $ab-6=-2 \iff ab=4$. 1 番めの式より $b=1$. 3 番めの式より $c=1$. 4 番めの式より $a=-2d$.

よって, $a=4, d=-2$.

[2]

解答

(1) $\triangle ABC$ に関して正弦定理を適用する。外接円の半径を R とおくと、

$$BC = 2R \sin A = 2 \times 1 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}. \dots\dots [\text{答}]$$

(2) $\triangle EBC$ に関して余弦定理を適用すると、

$$BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ \iff 3 = a^2 + b^2 + ab.$$

$$b = at \text{ を代入すると, } 3 = a^2 + a^2 t^2 + a^2 t = a^2 (t^2 + t + 1). \text{ よって, } a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2 + t + 1}}. \dots\dots [\text{答}]$$

$$(3) \quad a + b = a + at = a(1 + t) = \frac{\sqrt{3}(1 + t)}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + t + 1}} = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{t}{t^2 + t + 1}}.$$

ここで、 $\frac{t}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{t + 1 + \frac{1}{t}}$ の分母は、相加相乗平均の不等式より、

$$(\text{分母}) \geq 1 + 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} = 3 \text{ なので, } \frac{t}{t^2 + t + 1} \leq \frac{1}{3}. \text{ よって,}$$

$$(\text{上の式}) \leq \sqrt{3} \times \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 2. \text{ 等号は } t = \frac{1}{t}, \text{ つまり } t = 1 \text{ のとき.}$$

以上より、 $t = 1$ のとき $a + b$ は最大値 2 となる。……… [答]

(4) 一辺の長さが a と b の正三角形の面積和は

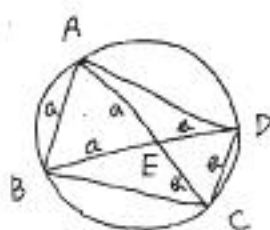
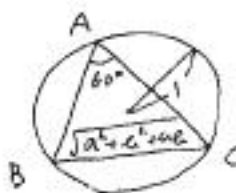
$$\frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} b^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + b^2).$$

これに $b = at$ を代入して、さらに (2) の答を代入すると、

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 (1 + t^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3(1 + t^2)}{t^2 + t + 1} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{t}{t^2 + t + 1}\right). \text{ ここで, } \frac{t}{t^2 + t + 1} \leq \frac{1}{3} \text{ (等号は } t = 1 \text{ のとき) であ}$$

$$\text{ることを (3) の解答で示していたので, } (\text{上の式}) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

以上より、面積和は $t = 1$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。……… [答]

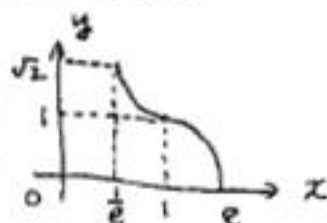


解答

(1) 合成関数の導関数の公式より, $f'_n(x) = \frac{\{1 - (\log x)^n\}'}{2\sqrt{1 - (\log x)^n}} = \frac{-n(\log x)^{n-1}}{2x\sqrt{1 - (\log x)^n}}$ [答] となる.

(i) n が奇数のとき, $n-1$ は偶数なので, $f'_n(x)$ の分子は常に非正となる. 分母は定義域内で常に非負なので, $f_n(x)$ の増減表は以下の通り.

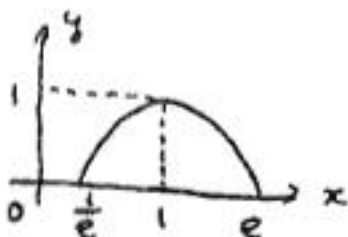
x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'_n(x)$		-	(0)	-	
$f_n(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



なお, $x=1$ での微分係数は, $n=1$ のときは $f'_1(1) = \frac{-1}{2} < 0$ であり, $n > 1$ のとき $f'_n(1) = 0$ となる.

(ii) n が偶数のとき, $n-1$ は奇数なので, $(f'_n(x) \text{ の分子}) = 0$ の解 $x=1$ の前後で分子の符号が変化する. 分母は定義域内で常に非負なので, $f_n(x)$ の増減表は以下の通り.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'_n(x)$		+	0	-	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



以上より, 最大値は n が奇数のとき, $f_n(\frac{1}{e}) = \sqrt{2}$, n が偶数のとき, $f_n(1) = 1$ [答]

(2) $C_1: y = \sqrt{1 - \log x}$, $C_2: y = \sqrt{1 - (\log x)^2} = \sqrt{1 - \log x} \sqrt{1 + \log x}$ である.

(i) $1 - \log x = 0$ のとき, 共有点は $(e, 0)$ となる.

(ii) $1 - \log x \neq 0$ のとき, $\sqrt{1 - \log x} = \sqrt{1 - \log x} \sqrt{1 + \log x} \iff 1 = \sqrt{1 + \log x} \iff x = 1$ より, 共有点は, $(1, 1)$ となる.

以上より, 共有点は $(e, 0), (1, 1)$ [答]

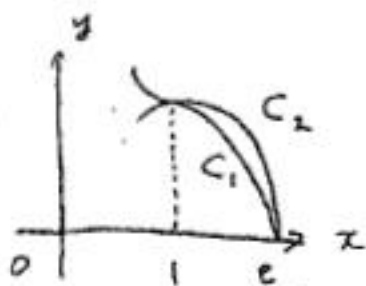
(3) $1 \leq x \leq e$ では, C_2 の方が上にあるので, 求める体積 V は

$$V = \int_1^e \pi \sqrt{1 - (\log x)^2}^2 dx - \int_1^e \pi \sqrt{1 - \log x}^2 dx = \pi \int_1^e \{\log x - (\log x)^2\} dx.$$

$$\text{ここで } \int_1^e \log x dx = [x \log x - x]_1^e = 1.$$

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = [x(\log x)^2]_1^e - \int_1^e 2x(\log x) \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \log x dx = e - 2.$$

$$\text{よって, } V = \pi\{1 - (e - 2)\} = (3 - e)\pi. \text{ [答]}$$



〔4〕

解答

$$(1) \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

$$(2) \quad f'(\theta) = -2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta = -2(\sin \theta + \sin 2\theta)$$

$= -2 \sin \theta (1 + 2 \cos \theta)$ である。よって、増減表は以下の通り。

θ	0	...	$\pi/3$
$f'(\theta)$	0	-	
$f(\theta)$	3	$\searrow$	$1/2$

$\dots\dots \text{〔答〕}$

$$g'(\theta) = 2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta = -2(\cos 2\theta - \cos \theta)$$

$$= -2(2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1) = -2(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1)$$

である。よって、増減表は以下の通り。

θ	0	...	$\pi/3$
$g'(\theta)$	0	+	
$g(\theta)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$

$\dots\dots \text{〔答〕}$

$$(3) \quad (0,0) \text{ と } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ を結ぶ直線の傾きは } \sqrt{3} \text{ なので、直線の式は } y = \sqrt{3}x. \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

(4) 面積の公式より、

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ (2 \cos \theta + \cos 2\theta)(2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) - (2 \sin \theta - \sin 2\theta)(-2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta) \} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ (2 \cos \theta + \cos 2\theta)(\cos \theta - \cos 2\theta) + (2 \sin \theta - \sin 2\theta)(\sin \theta + \sin 2\theta) \} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ 1 - (\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ 1 - \cos(2\theta + \theta) \} d\theta = \left[\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

解説

定円周 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ の内側を、動円周 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1$ が滑らずに転がることを考える。 C_2 の中心が反時計回りに進むように動かす。最初の C_2 上の $(3,0)$ の位置にある点の軌跡が $(f(\theta), g(\theta))$ である。

