

2008年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) $a > 0$ とする. 2 次方程式 $ax^2 - 6\sqrt{2}x + a^2 - 11a + 28 = 0$ が相異なる実数解をもつための必要十分条件は、判別式 $D(a) = \text{ア} > 0$ である. すなわち,

$$0 < a < \text{イ} \quad \text{または} \quad \text{ウ} < a < \text{エ}$$

である. また、この 2 次方程式が負の解をもつのは

$$\text{オ} < a < \text{カ}$$

のときである.

- (2) 曲線 $C: x = t - 2, y = -t^2 + 4t$ ($2 < t < 4$) は x, y で表すと $y = \text{キ}$, ($\text{ク} < x < \text{ケ}$) である. C 上の点 $P(a, b)$ における接線の方程式は $y = \text{コ}x + \text{サ}$ であり、この接線と x 軸, y 軸で囲まれる三角形の面積を $f(a)$ とすると,

$$f(a) = \text{シ}, f'(a) = \text{ス}, f''(a) = \text{セ} > 0$$

であるから、 $f(a)$ は $a = \text{ソ}$ のとき最小になる.

〔Ⅱ〕 xyz 空間上で点 $A(0, 1, 0)$ と点 $B(1, 1+b, c)$ を結ぶ線分 AB を $t: (1-t)$ に内分する点を Q とする. ただし、 $b^2 + c^2 = 1, 0 \leq t \leq 1$ である. 次の各問に答えよ.

- (1) 点 Q の座標を求めよ.
- (2) 点 Q と x 軸の距離 $L(t)$ を t と b で表せ.
- (3) (2) で求めた距離 $L(t)$ の最小値を b を用いて表せ.
- (4) 線分 AB が x 軸と共有点をもつように b の値を定めよ.

〔 III 〕 平面上の $\triangle OAB$ において

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = t$$

とする. 頂角 $\angle AOB$ の 2 等分線と辺 AB との交点を P とし, $\triangle OAB$ の内心を J , 外心を Q とする. 次の各問に答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.
- (2) $\overrightarrow{OJ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.
- (3) $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e}$ とする. $\vec{e}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.
- (4) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.

〔 IV 〕 関数 $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ とその定積分 $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ について次の各問に答えよ. ただし, n は正の整数である.

- (1) $f_{n+1}(x)$ の導関数 $f'_{n+1}(x)$ が $f'_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x)g(x)$ をみたすとき, 多項式 $g(x)$ を求めよ.
- (2) $f_{n+2}(x)$ の第 2 次導関数 $f''_{n+2}(x)$ に対し $f''_{n+2}(x) = A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x)$ が成り立つとき, 定数 A_n, B_n を n で表せ.
- (3) (2) の A_n, B_n に対し, $A_n I_{n+1} + B_n I_n$ を求めよ.
- (4) $J_n = (2n+1)! I_n$ とおく. J_{n+1} を J_n で表せ.
- (5) I_n を求めよ.