

2008年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n - 1 \quad (n \geq 1)$$

で定める. さらに, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{2^{n-1}}(a_n - 1)$$

によって定めると, $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \text{ア}$, 公差 イ の等差数列である. したがって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \text{ウ}$ である.

(2) xy 平面上に原点を中心とする楕円 E がある. その長軸は x 軸上にあり, 長さ $2a$, 短軸は長さ $2b$ である ($a > b$). 楕円 E の方程式は エ である. E 上の 3 点 $A(-a, 0)$, $B(0, -b)$, $P(p, q)$ がつくる $\triangle ABP$ の辺 AB を底辺とするときの高さを p, q で表すと オ であるから, $\triangle ABP$ の面積を S とすると, $S = \text{カ}$ である. したがって, S は $(p, q) = (\text{キ}, \text{ク})$ のときに最大であり, 最大値は ケ である.

〔Ⅱ〕 実数 x に対し, 無限等比級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^k}$ について次の各問に答えよ.

- (1) この等比級数が収束するような x の値の範囲を D とする. D を定めよ.
- (2) D の範囲にある x に対するこの等比級数の値を $f(x)$ とするとき, D で定義される関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.
- (3) 自然数 $n \geq 2$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$, $x = n$ で囲まれた部分の面積を S_n とする. S_n を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

〔 III 〕 xy 平面上で, x 軸に関する対称移動を表す行列を A とし, 原点を中心とする角 θ の回転移動を表す行列を P とする. 次の各問に答えよ.

- (1) 原点のまわりに $-\theta$ だけ回転した後, x 軸に関して対称移動することにより, 点 (x, y) が点 (x', y') に移動する. このとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をみたす行列 B を A と P を用いて表せ.
- (2) 直線 $y = (\tan \theta)x$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に関する対称移動を表す行列を Q とする. Q を A と P を用いて表せ.
- (3) 直線 $y = (\tan \theta)x$ に関する対称移動により点 (x, y) が点 (x'', y'') に移動し, $x''' = \frac{1}{2}x''$, $y''' = \frac{1}{2}y''$ とする. このとき, $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をみたす行列 R を Q を用いて表せ. また, R^2 を求めよ.
- (4) 点 $P_1 = (a_1, b_1)$ に対して, 点 $P_i = (a_i, b_i)$ ($i = 2, 3, \dots$) を

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

で定めると, 点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ が一つの直線上にあることを示せ.

- (5) 線分 OP_i ($i = 1, 2, \dots$) の長さを ℓ_i とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ell_i$ を ℓ_1 で表せ.

〔 IV 〕 関数 $f(x) = 2 \cos(\pi x) + 3\pi x^2$ について次の各問に答えよ.

- (1) $\tan(\pi x) > \pi x$ が $0 < x < \frac{1}{3}$ で成り立つことを示せ.
- (2) $\frac{\sin(\pi x)}{x}$ が $0 < x < \frac{1}{3}$ で減少することを示せ.
- (3) $g(x) = \frac{f'(x)}{x}$ とする. $g(x)$ が $0 < x < \frac{1}{3}$ で増加することを示せ.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $g\left(\frac{1}{6}\right)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$ の値をそれぞれ求めよ.
- (5) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.