

〔1〕

ア	$\sqrt{2}$	イ	$\frac{\pi}{4}$	ウ	$\sqrt{2}$	エ	$\frac{t^2-1}{2}$
オ	$-\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t$	カ	$-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}$	キ	1	ク	-1
ケ	$-2s^2+1$	コ	$-\frac{t^4}{2}+t^2+\frac{1}{2}$				

〔解説〕

三角関数の合成によって

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ なので

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

ゆえに $|t| \leq \sqrt{2}$

また、前式の両辺を二乗すると

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2s \\ \therefore s &= \frac{t^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= t(1 - s) \\ &= -\frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t (= f(t)) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}(t-1)(t+1) \end{aligned}$$

なので $f'(t)=0$ とすると $t=\pm 1$ 。ゆえに $f(t) (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$ の増減表は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	...	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに、最大値 $M=1 (t=1)$ 最小値 $m=-1 (t=-1)$ である。

さらに、

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta + \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2s^2 \\ &= 1 - 2 \left(\frac{t^2 - 1}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{t^4}{2} + t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} u &= -2s^2 + 1 \\ &= -\frac{t^4}{2} + t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

【Ⅱ】

(1)

$y=f(x)$ が原点 O および点 $(1, 3)$ を通るので、

$$\begin{cases} f(0)=p \cdot 0^2+q \cdot 0+r=0 \\ f(1)=p \cdot 1^2+q \cdot 1+r=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ p+q=3 \end{cases}$$

また原点 O で直線 $y=2x$ と接するので、 $f(x)$ の $x=0$ における微分係数が 2 になる。つまり

$$f'(x)=2px+q \quad (r=0 \text{ とした})$$

において

$$f'(0)=q=2$$

以上から

$$p=1, q=2, r=0$$

であり、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ &= (x+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。 x が実数全体を動くとき、 $f(x)$ の最小値は -1 である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad & p=1, q=2, r=0 \\ & \text{最小値 } -1 \ (x=-1) \end{aligned}$$

(2)

点 A, B の座標はそれぞれ $(a, a^2+2a), (b, b^2+2b)$ である。 $\angle AOB$ が直角なので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} a \\ a^2+2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ b^2+2b \end{pmatrix} \\ &= ab + ab(a+2)(b+2) = 0 \end{aligned}$$

$a \neq 0, b \neq 0$ より、両辺を ab で割って、

$$1 + (a+2)(b+2) = 0$$

となる。ここで、 $a+2=0$ とすると $1=0$ となり矛盾するので $a+2 \neq 0$ したがって

$$b = -2 - \frac{1}{a+2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad b = -2 - \frac{1}{a+2}$$

(3)

$$\begin{aligned} b-a &= -2 - \frac{1}{a+2} - a \\ &= -(a+2) - \frac{1}{a+2} \end{aligned}$$

$b > a$ なので $b-a > 0$ 。ゆえに $-(a+2) > 0$ である必要がある。そこで $c = -(a+2)$ とおけば、

$$b-a = c + \frac{1}{c} \quad (c > 0)$$

相加相乗平均の関係から

$$b-a \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2$$

となり、等号は

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{c} \\ \Leftrightarrow c^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a+2 &= -1 \quad (\because a+2 < 0) \\ \therefore a &= -3 \end{aligned}$$

で成り立つ。このとき $b = -2 - \frac{1}{-3+2} = -1$ である。

よって $a = -3, b = -1$ のときに $b-a$ は最小値 2 をとる。

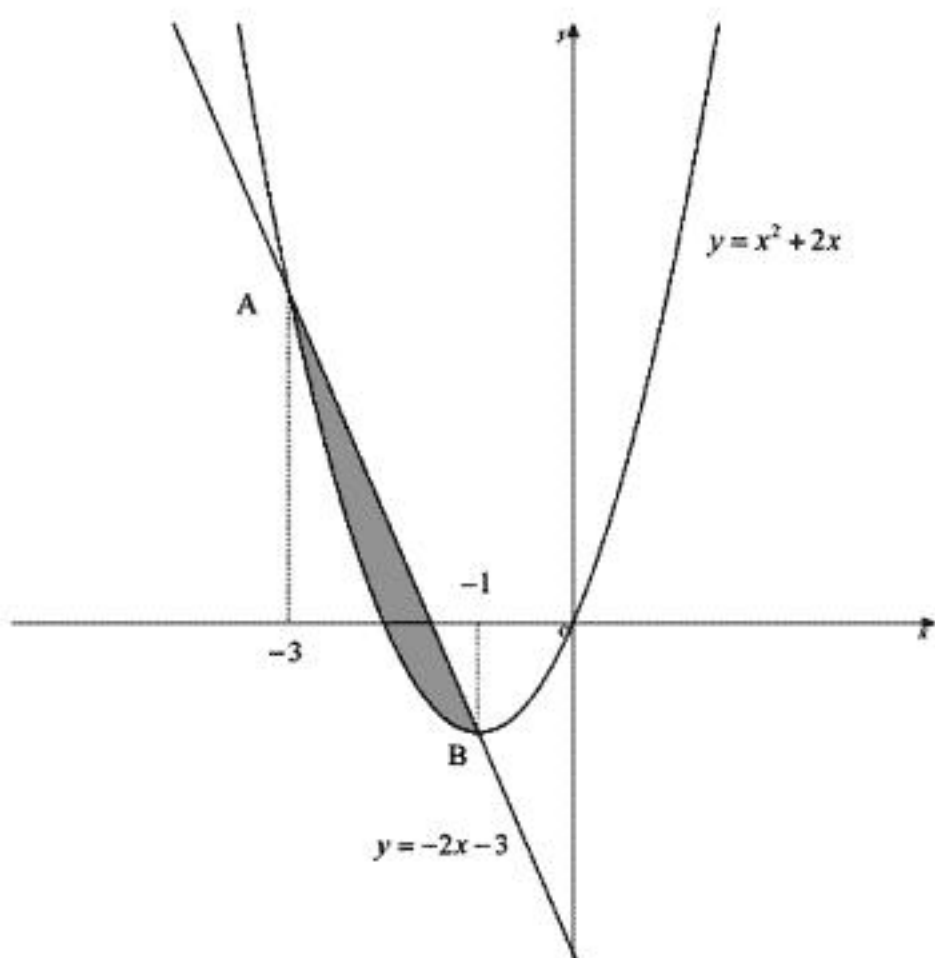
$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad & \text{最小値 } 2 \\ & a = -3, b = -1 \end{aligned}$$

(4)

点 A, B の座標はそれぞれ $(-3, 3), (-1, -1)$ より直線 AB の方程式は

$$y = -2x - 3$$

である。よって面積を求めるのは次図の灰色部分。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} \{(-2x-3) - (x^2+2x)\} dx &= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

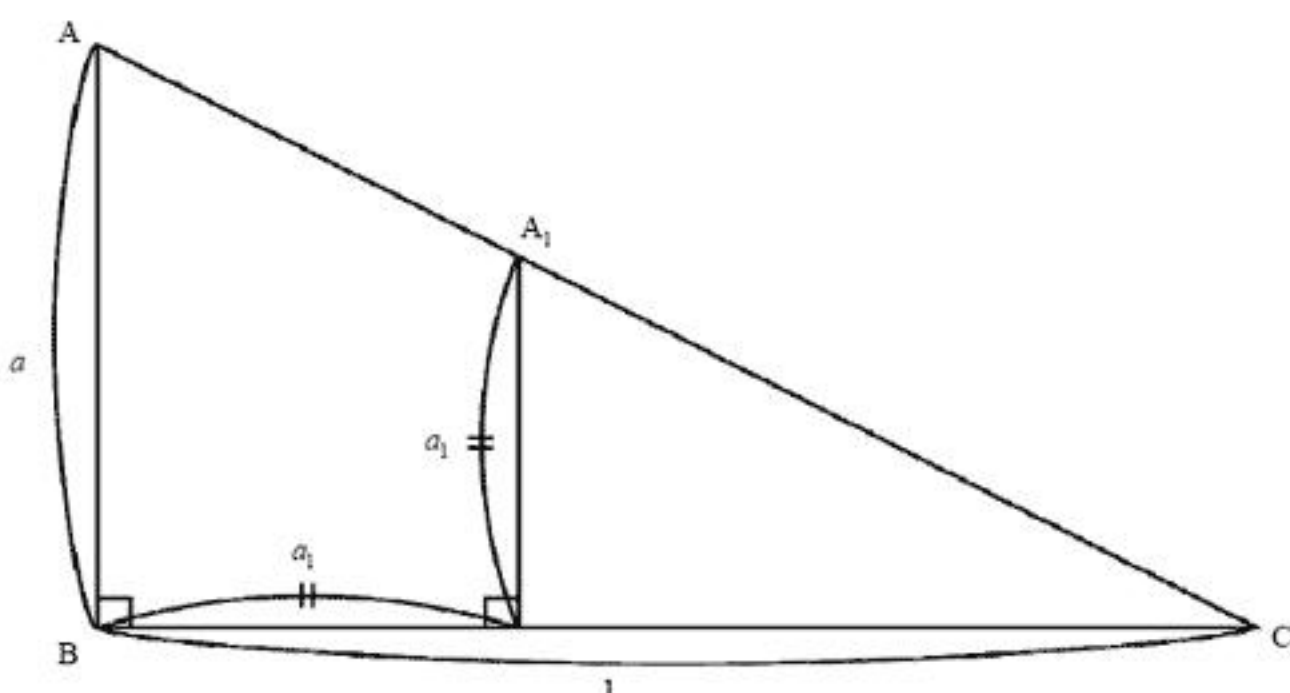
となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{3}$$

【Ⅲ】

(1)

次のような図が描ける。



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ なので、

$$AB:BC = A_1B_1:B_1C$$

$$a:1 = a_1:(1-a_1)$$

$$a(1-a_1) = a_1$$

$$(a+1)a_1 = a$$

$$\therefore a_1 = \frac{a}{1+a}$$

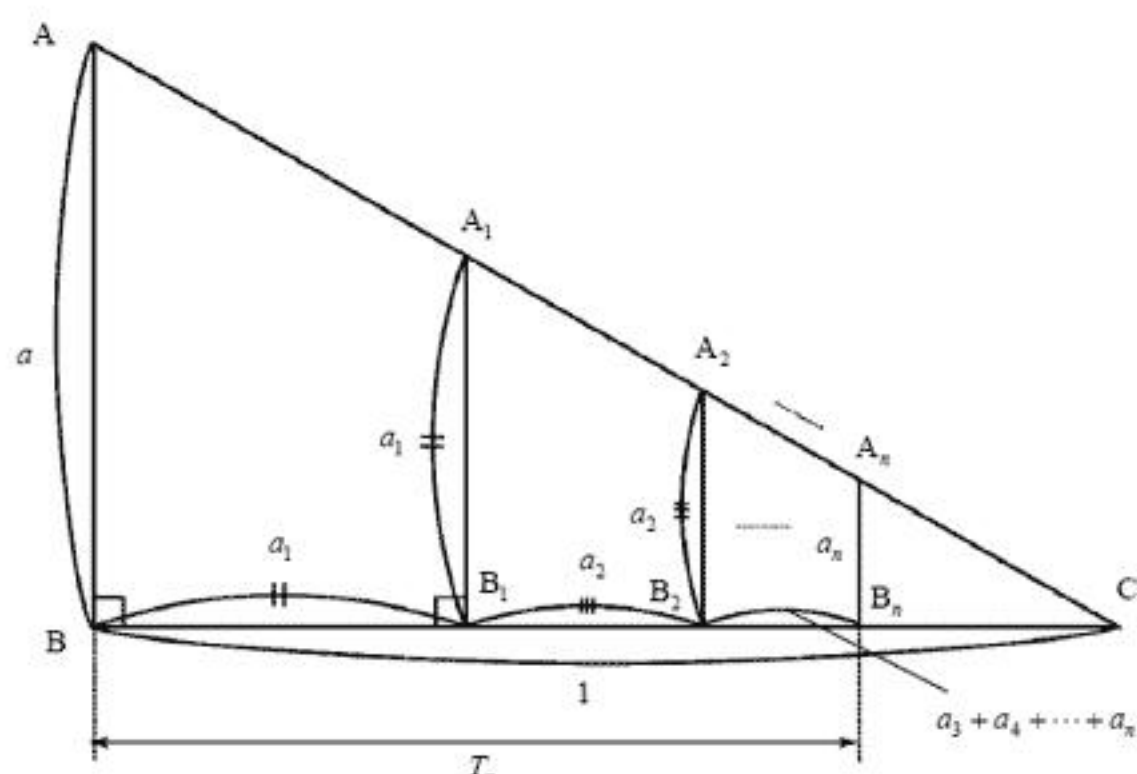
(答) $a_1 = \frac{a}{1+a}$

(2)

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = T_n$ とおく。点 A_1, B_1 から点 A_n, B_n までを考えたとき、

$$BB_1 = a_1, B_1B_2 = a_2, \dots, B_{n-1}B_n = a_n$$

となるので、 $BB_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = T_n$



前図から、(1)と同様 $\triangle ABC \sim \triangle A_nB_nC$ 。よって、

$$AB:BC = A_nB_n:B_nC$$

$$a:1 = a_n:(1-T_n)$$

$$\therefore a_n = a - aT_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore a_{n-1} = a - aT_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= -a(T_n - T_{n-1}) \\ &= -aa_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

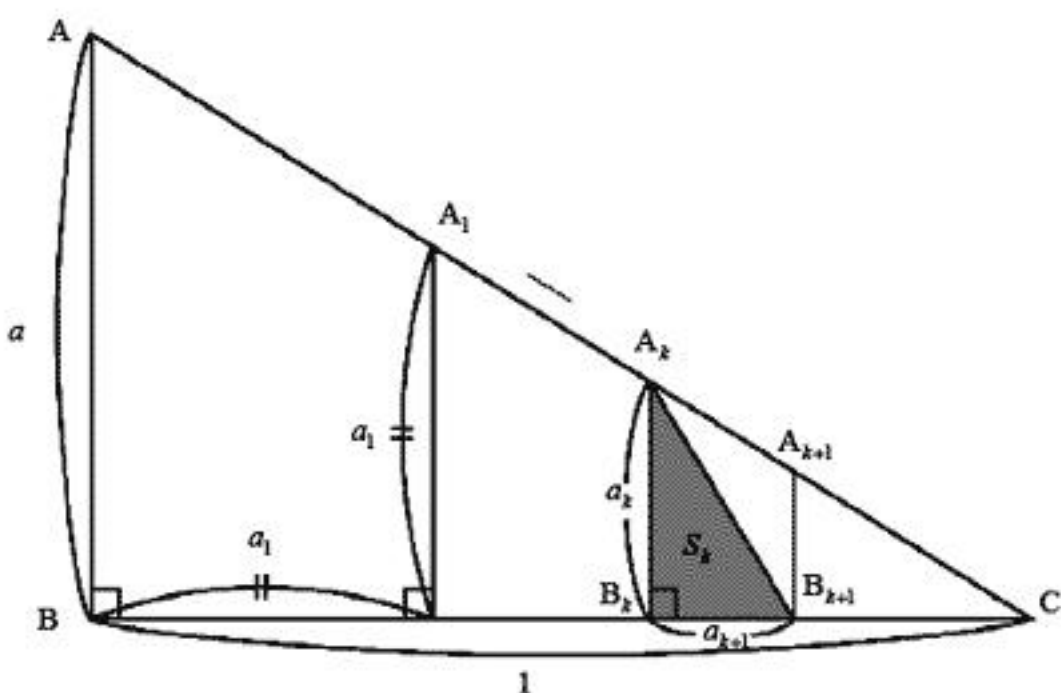
よってこれを繰り返し用いて、

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a} = \frac{a_{n-2}}{(1+a)^2} = \dots = \frac{a_1}{(1+a)^{n-1}} = \frac{a}{(1+a)^n} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

となる。これは、 $n=1$ でも成立する。

(答) $a_n = \frac{a}{(1+a)^n}$

(3)



前図より

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2} a_k a_{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{(1+a)^k} \cdot \frac{a}{(1+a)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^{2k+1}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{a^2}{2(1+a)^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+a)^{2(k-1)}} \\ &= \frac{a^2}{2(1+a)^3} \frac{1 - \frac{1}{(1+a)^{2n}}}{1 - \frac{1}{(1+a)^2}} \\ &= \frac{a^2}{2(1+a)^3} \frac{1 - \frac{1}{(1+a)^{2n}}}{\frac{(1+a)^2 - 1}{(1+a)^2}} \\ &= \frac{a^2}{2(1+a)^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+a)^{2n}}}{\frac{a^2 + 2a}{(1+a)^2}} \\ &= \frac{a}{2(1+a)(2+a)} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+a)^{2n}} \right\} \end{aligned}$$

(答) $\sum_{k=1}^n S_k = \frac{a}{2(1+a)(2+a)} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+a)^{2n}} \right\}$