

【I】

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad 1 \qquad \boxed{\text{イ}} \quad -2 \qquad \boxed{\text{ウ}} \quad -3 \qquad \boxed{\text{エ}} \quad 1$$

$$\boxed{\text{オ}} \quad 3 \qquad \boxed{\text{カ}} \quad -1$$

$$(2) \quad \boxed{\text{キ}} \quad -\frac{7}{25} \qquad \boxed{\text{ク}} \quad 2\theta \qquad \boxed{\text{ケ}} \quad 4\theta \qquad \boxed{\text{コ}} \quad \cos(2^{n-1}\theta)$$

【解説】

(1)

$$f'(x) = a(x-2)^2 + 2ax(x-2) + 2b(x-2) + c$$

である。問題文中の条件より、次の4式が成り立つ。

$$f(0) = 4b - 2c + d = -1$$

$$f'(0) = 4a - 4b + c = 9$$

$$f(2) = d = 1$$

$$f'(2) = c = -3$$

これらの式を連立して解くと、次の値を得る。

$$a = 1, b = -2, c = -3, d = 1$$

これらの値を $f(x)$, $f'(x)$ に代入すると次のようになる。

$$f(x) = (x-2)^3 - 3(x-2) + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-2)^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 2$ の範囲で増減表を書くと次のようになる。

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	↗		↘	1

よって、 $x=1$ のとき最大値

$$f(1) = (1-2)^3 - 3(1-2) + 1 = 3$$

をとり、 $x=0$ のとき最小値

$$-1$$

をとる。

(2)

$$a_1 = \frac{3}{5} \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1^2 - 1 \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

となる。 $a_1 = \cos \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1^2 - 1 \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2^2 - 1 \\ &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= \cos 4\theta \end{aligned}$$

となる。以上の結果から、 $a_1 = \cos \theta$ のとき $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$ となることが予測

できる。以下、 $a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$ が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = \cos \theta$$

となるので、成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$ が成り立つと仮定する。

このとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k^2 - 1 \\ &= 2\cos^2(2^{k-1}\theta) - 1 \\ &= \cos(2^{(k+1)-1}\theta) \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも $a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$ が成り立つ。

以上[1], [2]より、全ての自然数 n について $a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$ が成り立つ。

したがって $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \cos(2^{n-1}\theta)$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} p &= \frac{2p+6}{p+1} \\ p^2 - p - 6 &= 0 \\ (p+2)(p-3) &= 0 \\ \therefore p &= -2, 3 \end{aligned}$$

p は正の実数であるから、

$$p = 3$$

となる。

(答) $p = 3$

(2)

$a_n = b_n + 3$ であるから、これを $a_{n+1} = \frac{2a_n+6}{a_n+1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 3 &= \frac{2b_n + 12}{b_n + 4} \\ \therefore b_{n+1} &= \frac{-b_n}{b_n + 4} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $a_1 = 4$ であるから、 b_1 の値は

$$b_1 = a_1 - 3 = 1$$

となる。

(答) $b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{-b_n}{b_n + 4}$

(3)

①より、 b_n が 0 でないと仮定すると、 b_{n+1} も 0 でない。また、 b_1 が 0 でないので、数列 $\{b_n\}$ は 0 になり得ない。よって①の両辺は 0 ではないので、両辺の逆数をとって

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_{n+1}} &= -\frac{b_n + 4}{b_n} \\ &= -\frac{4}{b_n} - 1 \end{aligned}$$

この式に $c_n = \frac{1}{b_n}, c_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}$ を代入すると、

$$c_{n+1} = -4c_n - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $b_1 = 1$ であるから

$$c_1 = \frac{1}{1} = 1$$

となる。

(答) $c_1 = 1, c_{n+1} = -4c_n - 1$

(4)

②の特性方程式を解くと、

$$\begin{aligned} x &= -4x - 1 \\ \therefore x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

となるので、②は次のように変形できる。

$$c_{n+1} + \frac{1}{5} = -4 \left(c_n + \frac{1}{5} \right)$$

したがって、

$$\begin{aligned} c_n + \frac{1}{5} &= (-4)^{n-1} \cdot \left(c_1 + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot (-4)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore c_n = \frac{6}{5} \cdot (-4)^{n-1} - \frac{1}{5} \quad \dots \textcircled{3}$$

(答) $c_n = \frac{6}{5} \cdot (-4)^{n-1} - \frac{1}{5}$

(5)

③に $c_n = \frac{1}{b_n}$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} &= \frac{6}{5} \cdot (-4)^{n-1} - \frac{1}{5} \\ \therefore b_n &= \frac{5}{6 \cdot (-4)^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

これに $b_n = a_n - 3$ を代入して、

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= \frac{5}{6 \cdot (-4)^{n-1} - 1} \\ \therefore a_n &= \frac{18 \cdot (-4)^{n-1} + 2}{6 \cdot (-4)^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

(答) $a_n = \frac{18 \cdot (-4)^{n-1} + 2}{6 \cdot (-4)^{n-1} - 1}$

【Ⅲ】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ g(x) &= sx^3 + tx^2 + ux + v \end{aligned}$$

と置く。このとき、問題文の条件から以下の7式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(0) &= c = 0 \\ f(1) &= a + b + c = -1 \\ f(3) &= 9a + 3b + c = 3 \\ g(-3) &= -27s + 9t - 3u + v = -3 \\ g(-1) &= -s + t - u + v = 1 \\ g(1) &= s + t + u + v = -1 \\ g(3) &= 27s + 9t + 3u + v = 3 \end{aligned}$$

これらを連立して解くと、

$$a = 1, b = -2, c = 0, s = \frac{1}{4}, t = 0, u = -\frac{5}{4}, v = 0$$

となる。したがって、 $f(x), g(x)$ は次のようになる。

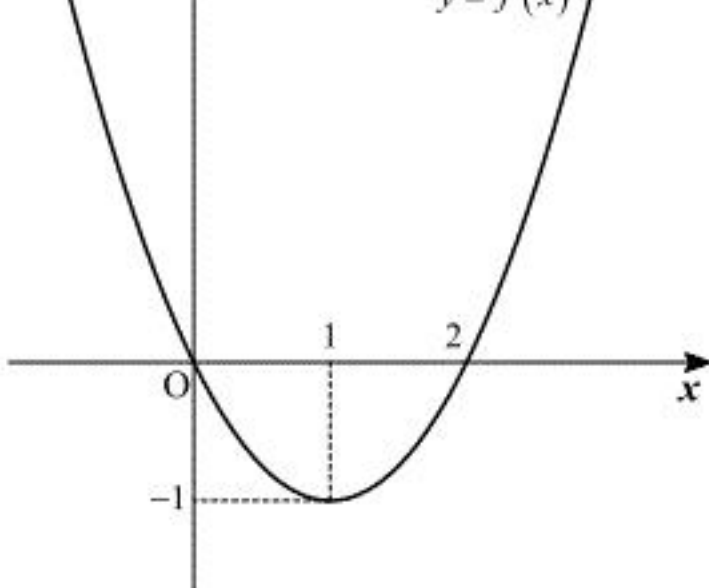
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x \\ g(x) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x \end{aligned}$$

(答) $f(x) = x^2 - 2x, g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x$

(2)

$$f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。

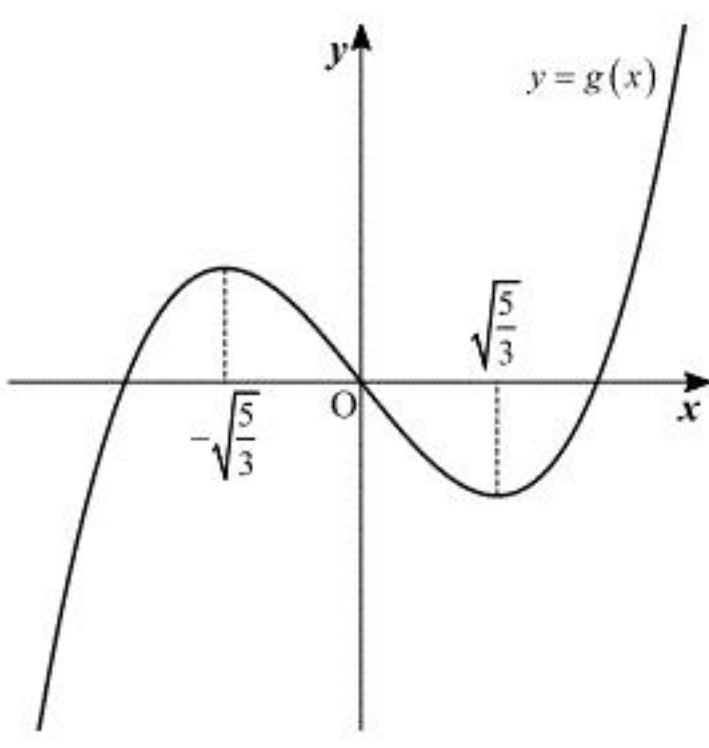


$$g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

より、増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	...	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

したがって $y = g(x)$ のグラフは次のようになる。

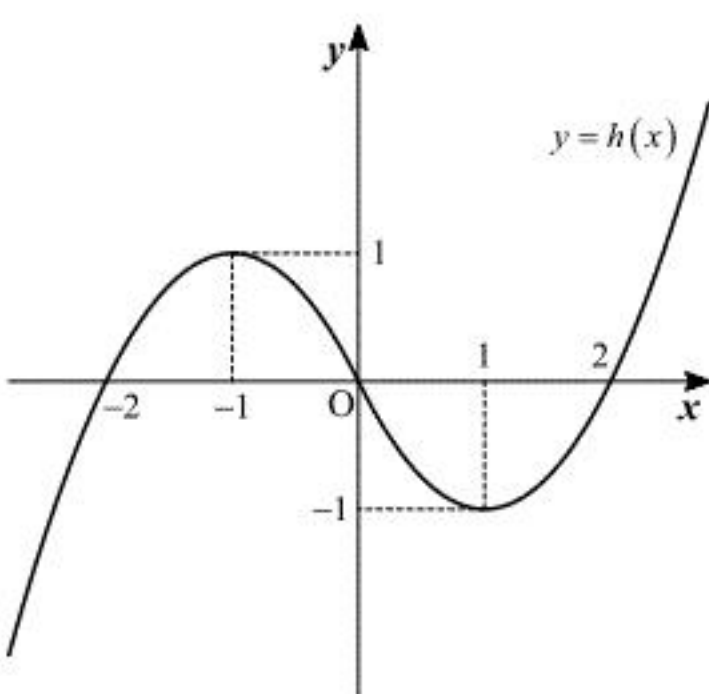


$$-f(-x) = -\{(-x)^2 - 2(-x)\} = -x^2 - 2x \quad (= -x(x + 2))$$

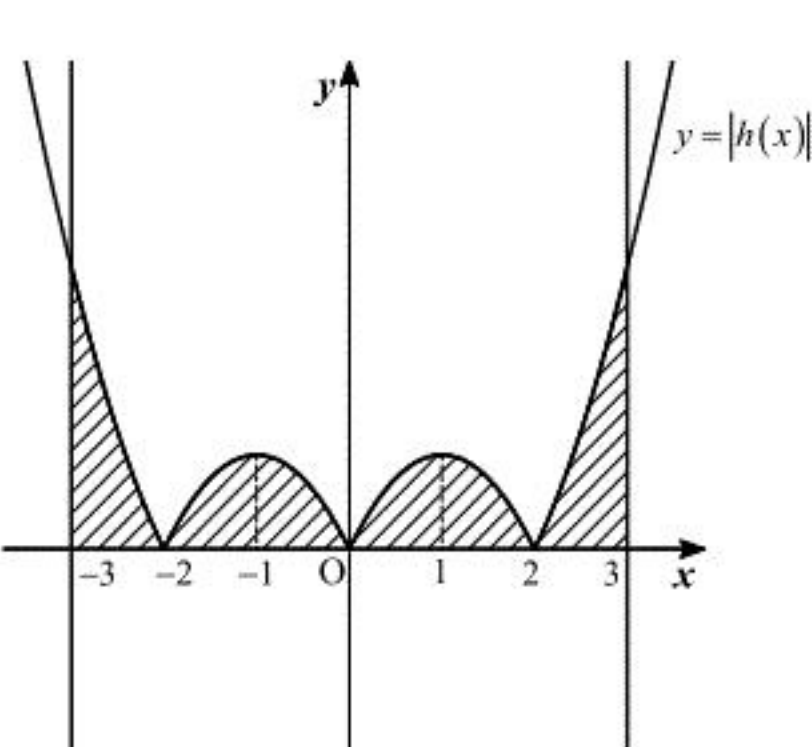
であるから、

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ -x^2 - 2x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって $y = h(x)$ のグラフは次のようになる。



(3)



$y = h(x)$ は、その定義から原点对称である。よって、 $y = |h(x)|$ は y 軸について対称であるから、求める面積は $0 \leq x \leq 3$ の範囲の面積の2倍である。したがって求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \left\{ -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \right\} \\ &= 2 \times \left\{ -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \right\} \\ &= 2 \times \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(答) $\frac{16}{3}$

(4)

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 - 2x) - \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x \right) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x \end{aligned}$$

であるから、

$$p'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{4}$$

となる。

(答) $p'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{4}$

(5)

(2)で示したように、

$$y = h(x), y = g(x)$$

は原点对称なグラフとなる。ゆえに、

$$y = h(x) - g(x)$$

も原点对称なグラフとなる。したがって

$$y = |h(x) - g(x)|$$

は y 軸について対称であるので、 $0 \leq x \leq 3$ の範囲での最大値が、 $-3 \leq x \leq 3$ の範囲での最大値ということになる。 $0 \leq x \leq 3$ の範囲では、

$$\begin{aligned} |h(x) - g(x)| &= |f(x) - g(x)| \\ &= |p(x)| \end{aligned}$$

であるから、 $y = p(x)$ のグラフについて考える。(4)より

$$p'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 3$ の範囲で増減表を書くと次のようになる。

x	0	...	$\frac{4 - \sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$	...	3
$p'(x)$		-	0	+	0	-	
$p(x)$		↘		↗		↘	

したがって $|p(x)|$ の最大値は

$$\begin{aligned} p\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right) &= \frac{10 - 7\sqrt{7}}{54} \\ p\left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right) &= \frac{10 + 7\sqrt{7}}{54} \end{aligned}$$

$$p(0) = p(3) = 0$$

より、

$$\frac{10 + 7\sqrt{7}}{54}$$

である。

(答) $\frac{10 + 7\sqrt{7}}{54}$