

$\boxed{\text{ア}}$ $\frac{3}{8}$	$\boxed{\text{イ}}$ $\frac{1}{2}$	$\boxed{\text{ウ}}$ $\frac{1}{8}$	$\boxed{\text{エ}}$ $\frac{3}{16}\pi$	$\boxed{\text{オ}}$ 1
$\boxed{\text{カ}}$ 0	$\boxed{\text{キ}}$ 1	$\boxed{\text{ク}}$ -2	$\boxed{\text{ケ}}$ 1	$\boxed{\text{コ}}$ $\frac{8}{15}$

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 \cos^4 \theta &= (\cos^2 \theta)^2 \\
 &= \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \times \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{16} \pi
 \end{aligned}$$

である。一方,

$$t = \sin \theta$$

とおくと,

$$\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$$

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\rightarrow$	1

であるから,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta \\
 &= \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt \\
 &= \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\
 &= \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right]_0^1 \\
 &= \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

となる。

[II]

(1)

背理法で示す。すなわち、 $A = kE$ が成立すると仮定し、矛盾することを示す。

[1] $k = 0$ のとき

$$A = O$$

より、

$$AB = O \neq E$$

したがって仮定に矛盾する。

[2] $k \neq 0$ のとき

$$AB = E$$

$$kB = E$$

$$\therefore B = \frac{1}{k}E$$

となるので、

$$A + B = E$$

$$kE + \frac{1}{k}E = E$$

$$\therefore \left(k + \frac{1}{k}\right)E = E$$

と変形できる。したがって

$$k + \frac{1}{k} = 1$$

$$k^2 - k + 1 = 0$$

$$\therefore \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

であるが、これを満たす実数 k は存在しない。したがって矛盾である。

以上[1], [2]より、 $A = kE$ とすると矛盾する。よって任意の実数 k に対して $A \neq kE$ である。

(証明終)

(2)

ハミルトン・ケーリーの定理より、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots \text{①}$$

一方、 $A + B = E \Leftrightarrow B = E - A$ より、

$$AB = A(E - A) = E$$

$$\therefore A^2 - A + E = O \quad \dots \text{②}$$

① - ②より、

$$(-a-d+1)A + (ad-bc-1)E = O$$

$$\therefore (a+d-1)A = (ad-bc-1)E \quad \dots \text{③}$$

ここで $a+d \neq 1$ と仮定すると、

$$A = \frac{ad-bc-1}{a+d-1}E$$

より、任意の実数 k に対して $A \neq kE$ であることに矛盾する。したがって

$$a+d=1$$

である。

(答) $a+d=1$

(3)

③より、

$$O = (ad-bc-1)E$$

となるので、

$$ad-bc-1=0$$

$$\therefore bc = ad-1 = a(1-a)-1$$

a は $2 \leq a \leq 9$ を満たす整数であるから、

$$a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

であり、それぞれについて

$$bc = a(1-a)-1$$

$$= -3, -7, -13, -21, -31, -43, -57, -73$$

となる。このうち $2 \leq b \leq |c| \leq 9$ が成り立つのは、

$$bc = -21 \quad (b=3, c=-7 \text{ のとき})$$

だけである。このとき

$$a(1-a)-1 = -21$$

$$(a-5)(a+4) = 0$$

$$\therefore a = 5$$

となる。また、

$$d = 1 - a = -4$$

である。以上から、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

一方、

$$B = E - A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(答) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

【Ⅲ】

(1)

任意の点 $(a, f(a))$ での接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

であり、これが点 $(a-1, 0)$ を通るので

$$0 = f'(a)(a-1-a) + f(a)$$

$$\therefore \frac{f'(a)}{f(a)} = 1$$

a は任意の実数なので、 a を x とすると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

(2)

$\log f(x)$ の導関数は、

$$\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

となるので、これを積分して、

$$\log f(x) = x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

$$\therefore f(x) = e^{x+C_1} = Ce^x \quad (C \text{ は } C = e^{C_1} \text{ をみたす定数})$$

となる。ここで $(-1, f(-1))$ における法線 l の方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(-1)}(x+1) + f(-1)$$

であり、これが原点を通るので

$$0 = -\frac{1}{Ce^{-1}} + Ce^{-1}$$

$$\therefore C = \pm e$$

ここで、 $f(x) > 0$ であるので

$$C = e$$

である。よって

$$f(x) = e \times e^x = e^{x+1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = e^{x+1}$$

(3)

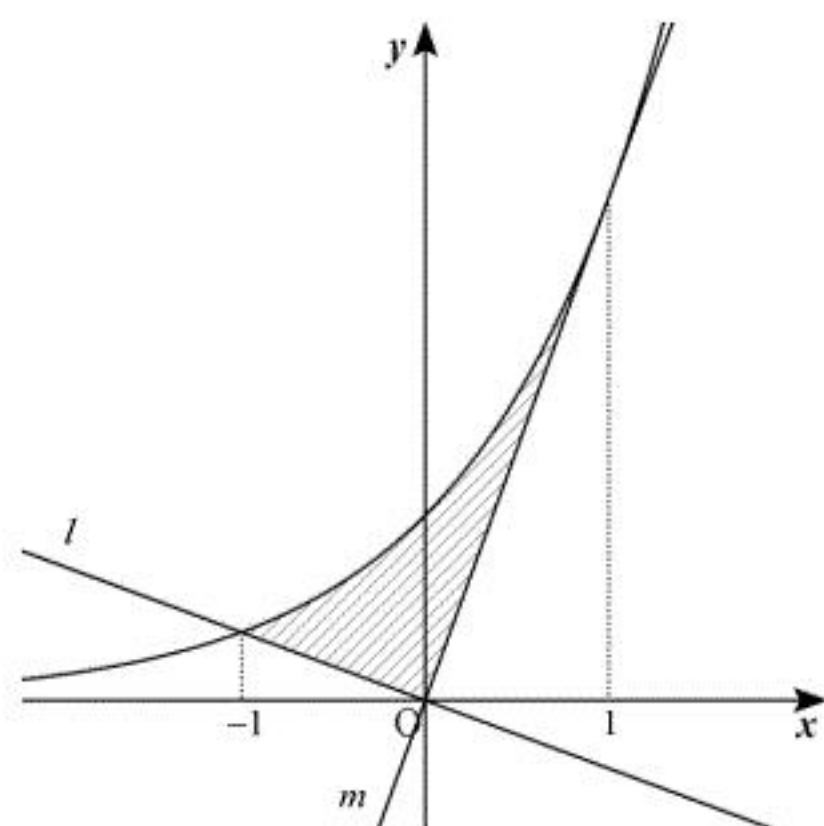
接線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= e^2 x \end{aligned}$$

法線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(-1)}(x+1) + f(-1) \\ &= -x \end{aligned}$$

よって求める面積は、次の図の斜線部の面積である。



よって、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (e^{x+1} + x) dx + \int_1^0 (e^{x+1} - e^2 x) dx &= \left[e^{x+1} + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[e^{x+1} - \frac{e^2}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (e^2 - 3)$$

[IV]

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-a, 0, 1)$$

であるから,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$$

となる。よって,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + 1) - a^4}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}$$

となる。

$$(答) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}$$

(2)

求めるベクトルを $\vec{d} = (p, q, r)$ とおく。 $\vec{d}$ は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ と直交するので,

$$\vec{d} \cdot \overrightarrow{AB} = -pa + qb = 0$$

$$\therefore q = \frac{a}{b} p$$

$$\vec{d} \cdot \overrightarrow{AC} = -pa + r = 0$$

$$\therefore r = pa$$

となる。また $\vec{d}$ は長さ 1 なので,

$$|\vec{d}|^2 = 1^2$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

$$p^2 + \frac{a^2}{b^2} p^2 + a^2 p^2 = 1$$

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2 b^2 + a^2 + b^2}$$

$$\therefore p = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}}$$

となる。このとき

$$q = \frac{a}{b} p = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}}$$

$$r = pa = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}}$$

である。ただし複合同順である。以上から

$$\vec{d} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}} (b, a, ab)$$

となる。

$$(答) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}} (b, a, ab)$$

(3)

$\overrightarrow{PH}$ は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ と直交するので, $\vec{d}$ と平行である。よって k を実数として

$$\overrightarrow{PH} = k \vec{d}$$

とおける。ここで, 面 $ABC \perp \vec{d}$ より,

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{d}$$

$$(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PA}) \cdot \vec{d} = 0$$

$$k(\vec{d} \cdot \vec{d}) - (a - 2, -2, -1) \cdot \vec{d} = 0$$

$$\therefore k = (a - 2, -2, -1) \cdot \vec{d} = \pm \frac{-2(a + b)}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}}$$

となる。よって,

$$\overrightarrow{PH} = \frac{-2(a + b)}{a^2 b^2 + a^2 + b^2} (b, a, ab)$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{PH} = \frac{-2(a + b)}{a^2 b^2 + a^2 + b^2} (b, a, ab)$$

(4)

$$V = \frac{1}{3} \times S \times |\overrightarrow{PH}|$$

$$= \frac{1}{3} \times S \times |k|$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2} \times \frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{1}{3} (a + b)$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1}{3} (a + b)$$

(5)

$$V = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} (a + b) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore b = 1 - a$$

となるので,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 (1 - a)^2 + a^2 + (1 - a)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1}$$

となる。ここで $f(a) = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1$ とおくと, S の増減の様子と $f(a)$ の増減の様子は一致する。

$$f'(a) = 4a^3 - 6a^2 + 6a - 2a$$

$$= 2(2a - 1) \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

となるので, 増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(a)$		-	0	+
S		$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$

したがって, $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最小値 $\frac{3}{8}$ をとる。

$$(答) \quad b = 1 - a, \quad a = \frac{1}{2} \text{ のとき } S \text{ は最小値 } \frac{3}{8} \text{ をとる}$$