[I]

〔解答〕

(1) ア 2　イ 1　ウ $\dfrac{\log\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) エ $\dfrac{1}{4}$　オ $(e-1)$　カ $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$　キ $\dfrac{e-1}{2}$

ク $\dfrac{1}{2}$　ケ $\dfrac{1}{2}$　コ $\dfrac{e}{2}$

〔解説〕

(1)

$$\frac{d}{dx}\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\times\left(2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\times\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \qquad \cdots ①$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{4x^2+1}\right)=\sqrt{4x^2+1}+x\cdot\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=2\sqrt{4x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \qquad \cdots ②$$

①$\times\dfrac{1}{4}$＋②$\times\dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{4}+\frac{x\sqrt{4x^2+1}}{2}\right\}=\sqrt{4x^2+1}$$

この両辺を区間$\left[0,1\right]$で積分して，

$$\int_0^1\sqrt{4x^2+1}\,dx=\left[\frac{\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{4}+\frac{x\sqrt{4x^2+1}}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{\log\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^2(\pi y)\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-\cos 2\pi y}{2}\,dy$$

$$=\left[\frac{y}{2}-\frac{\sin 2\pi y}{4\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4} \qquad \cdots ③$$

ここで，

$$f(x)=Ae^{2x}+B \qquad \cdots ④$$

より，

$$\int_0^1 e^{-y}f(y)\,dy=\int_0^1\left(Ae^{y}+Be^{-y}\right)dy$$

$$=\left[Ae^{y}-Be^{-y}\right]_0^1$$

$$=(e-1)A+\left(1-\frac{1}{e}\right)B \qquad \cdots ⑤$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(y)\,dy=\int_0^1\left(Ae^{2y}+B\right)dy$$

$$=\left[\frac{A}{2}e^{2y}+By\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{e-1}{2}A+\frac{1}{2}B \qquad \cdots ⑥$$

したがって，

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{2(e-1)}\int_0^1 e^{-y}f(y)\,dy+\int_0^{\frac{1}{2}}f(y)\,dy+\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^2(\pi y)\,dy$$

に③〜⑥を代入すると

$$Ae^{2x}+B=\frac{e^{2x}}{2(e-1)}\left\{(e-1)A+\left(1-\frac{1}{e}\right)B\right\}+\frac{e-1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}$$

$$=\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2e}\right)e^{2x}+\left\{\frac{e-1}{2}A+\frac{B}{2}+\frac{1}{4}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ A=\frac{A}{2}+\frac{B}{2e},\ B=\frac{e-1}{2}A+\frac{B}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ A=\frac{1}{2},\ B=\frac{e}{2}$$

[Ⅱ]

(1)

原点を O とすると

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$$

と表せるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\end{aligned}$$

(答) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

(2)

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

(答) 0

(3)

(2)より

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha=\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\beta$$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|\neq 0$ より,

$$\cos\alpha=\cos\beta$$

$0\leqq\alpha\leqq\pi$, $0\leqq\beta\leqq\pi$ より,

$$\alpha=\beta$$

となる。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL}&=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}\\&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)\end{aligned}$$

(2)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{KL}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)\\&=0\end{aligned}$$

であるから, $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{KN}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$ である。

(答) $\frac{\pi}{2}$

[III]

(1)

$$\begin{aligned}A^2-5A+4E&=\begin{pmatrix}6&-5\\-10&5\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\&=O\end{aligned}$$

(証明終)

(2)

$Z^2=A$が成り立つとき,

$$\begin{aligned}Z^2-A&=(xA+yE)^2-A\\&=x^2A^2+2xyA+y^2E-A\\&=x^2(5A-4E)+2xyA+y^2E-A\\&=(5x^2+2xy-1)A+(y-2x)(y+2x)E\\&=O\end{aligned}$$

$A\neq kE$より,

$$\begin{cases}5x^2+2xy-1=0\\(y-2x)(y+2x)=0\end{cases}$$

ここで, x, yは正の実数なので, 2つ目の式より

$$y=2x$$

よって1つ目の式は

$$5x^2+4x^2-1=(3x-1)(3x+1)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}\quad(\because\ x>0)$$

以上から,

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

(答) $(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

(3)

$W=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$とおくと,

$$\begin{aligned}&BW=WB\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}r&s\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&p\\0&r\end{pmatrix}\\&\therefore r=0,\ s=p\end{aligned}$$

したがって

$$W=\begin{pmatrix}p&q\\0&p\end{pmatrix}=qB+pE$$

ここで, $q=u$, $s=p=v$とおけば

$$W=uB+vE$$

となる。よって示された。

(証明終)

(4)

$Y=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$とおくと,

$$Y^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$$

したがって$B=Y^2$が成り立つと仮定すると,

$$\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$c(a+d)=0,\ b(a+d)=1$$

より,

$$c=0$$

よって,

$$a^2+bc=0,\ d^2+bc=0$$

より

$$a=0,\ d=0$$

となるが, これは$b(a+d)=0\neq1$となり, 矛盾する。

ゆえに$B=Y^2$をみたすYは存在しない。

(証明終)

[IV]

(1)

$\left|-x^2\right|<1$ より，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^k$$
$$=1+\frac{-x^2}{1+x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}$$

(答) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(2)

$x=\tan\theta$ とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	0	$\to$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{6}$

であるから，

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\pi}{6}$$

(3)

$$f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}=1+\sum_{k=1}^{2n}\left(-x^2\right)^k-\frac{1}{1+x^2}$$
$$=1+\frac{-x^2-\left(-x^2\right)^{2n+1}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\frac{x^{4n+2}}{1+x^2}$$

ここで，$0<x<1$ より，$0<\dfrac{x^{4n+2}}{1+x^2}<x^{4n+2}$ なので，

$$0<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right)dx<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^{4n+2}dx$$
$$=\left[\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{4n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4n+3}$$

よって示された。

(証明終)

(4)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{1+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x^{2k}\right\}dx$$
$$=\left[x+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$

よって示された。

(証明終)

(5)

(3)で示した不等式において $n\to\infty$ として，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(f_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=0$$

である。ここで，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$

と表すことにすると，m を自然数として，

[1] $n=2m$ と表せるとき

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_m(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_m(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

[2] $n=2m-1$ と表せるとき

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}-\frac{(-1)^{2m}}{4m+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4m+1}\right\}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_m(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}-0$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_m(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

以上[1], [2]より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となるので，(2), (4)より，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\sqrt{3}\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$
$$=\sqrt{3}\times\left\{\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f_n(x)\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$
$$=\sqrt{3}\times\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}\,dx-1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-1$$

(答) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi-1$