

2010年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

[I] 次の に適する数を，解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ．

$$\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ウ}} \cos 4\theta$$

なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \boxed{\text{エ}}$$

一方，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta$ において $t = \sin \theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \int_{\boxed{\text{カ}}}^{\boxed{\text{オ}}} (\boxed{\text{キ}} t^4 + \boxed{\text{ク}} t^2 + \boxed{\text{ケ}}) dt = \boxed{\text{コ}}$$

となる．

[II] a, b, c, d, x, y, z, u を実数とし, 行列 A, B, E を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. また,

$$A + B = E, \quad AB = E$$

が成立するとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 任意の実数 k に対して $A \neq kE$ であることを示せ.
- (2) $a + d$ を計算せよ.
- (3) a, b, c が整数であり,

$$2 \leq a \leq 9, \quad 2 \leq b \leq |c| \leq 9$$

をみたすとき, 行列 A, B を決定せよ.

[III] 関数 $f(x)$ は微分可能で、つねに $f(x) > 0$ であり、曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 $(a, f(a))$ での接線が x 軸と $(a - 1, 0)$ で交わるとする。また、 $y = f(x)$ 上の点 $(-1, f(-1))$ での法線 ℓ は原点 $(0, 0)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ を求めよ。
- (2) $\log f(x)$ の導関数を計算し、 $f(x)$ を決定せよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ 、および点 $(1, f(1))$ における接線 m と点 $(-1, f(-1))$ における法線 ℓ により囲まれた部分の面積を計算せよ。

[IV] a, b を正の実数とし、座標空間内の点を $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $P(2, 2, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S を a, b を用いて表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に直交する長さ 1 のベクトルをすべて、 a, b を用いて成分表示せよ。
- (3) 点 P から $\triangle ABC$ を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。ベクトル $\overrightarrow{PH}$ を a, b を用いて成分表示せよ。
- (4) 四面体 $PABC$ の体積 V を a, b を用いて表せ。
- (5) $V = \frac{1}{3}$ であるとき b を a を用いて表せ。また、このときの $\triangle ABC$ の面積 S の最小値とそのときの a の値を求めよ。