

2010年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

[1] 次の に適する数あるいは式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 曲線 $C: y = \cos x$ 上の点 $(a, \cos a)$ ($a \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$) における法線の方程式は $y = \text{ア}$ であり、法線と x 軸の交点 P の座標は $(\text{イ}, 0)$ である. したがって、交点 P と $(a, 0)$ の距離は $f(a) = \text{ウ}$ と表せる. もし $\frac{\pi}{8} \leq a \leq \frac{\pi}{3}$ であれば、距離 $f(a)$ は $a = \text{エ}$ のとき最大値 オ をとり、 $a = \text{カ}$ のとき最小値 キ をとる.

- (2) 曲線

$$C': y = x + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1 \leq x \leq 4)$$

と直線 $x = 1, x = 4$ および x 軸で囲まれた部分の面積は ク であり、それを x 軸のまわりに回転させてできる回転体と y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積はそれぞれ ケ と コ である.

[II] 関数 $f(x) = xe^{-|x|}$ について次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の極値を計算せよ.
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$ を利用して $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.
- (3) 直線 $y = mx$ と曲線 $y = f(x)$ が原点以外に共有点を持つための条件を, m を用いて表せ.
- (4) 直線 $y = mx$ と曲線 $y = f(x)$ が原点以外に共有点を持つとする. このとき, 直線 $y = mx$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

[III] 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

をみたしている. $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}b_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

をみたしている. $\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{c_n\}$ は

$$c_1 = 1, \quad c_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}c_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

をみたしている. $\{c_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(4) 上の (3) の数列 $\{c_n\}$ に対し, $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$ を n を用いて表せ.

[IV] 行列 S, T を,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, m を正の整数とする. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $S^3T^2, (S+T)^5$ を求めよ.

(2) 行列 $(S+T)^{2m+1}$ を求めよ.

(3) $(1+x)^{2m+1}$ の展開式を用いて

$$\begin{aligned} & {}_{2m+1}C_0 + {}_{2m+1}C_2 + \cdots + {}_{2m+1}C_{2k} + \cdots + {}_{2m+1}C_{2m} \\ &= {}_{2m+1}C_1 + {}_{2m+1}C_3 + \cdots + {}_{2m+1}C_{2k+1} + \cdots + {}_{2m+1}C_{2m+1} = 2^{2m} \end{aligned}$$

であることを示せ.

(4) $S^{2m+1} + {}_{2m+1}C_1 S^{2m}T + \cdots + {}_{2m+1}C_r S^{2m+1-r}T^r + \cdots + T^{2m+1}$ を求めよ.

(5) 正の整数 m に対し,

$$\begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} = (S+T)^{2m+1}$$

$$\begin{pmatrix} x_m & y_m \\ z_m & u_m \end{pmatrix} = S^{2m+1} + {}_{2m+1}C_1 S^{2m}T + \cdots + {}_{2m+1}C_r S^{2m+1-r}T^r + \cdots + T^{2m+1}$$

とおく. b_m と y_m のどちらが大きいかが判定せよ. また, c_m と z_m のどちらが大きいかが判定せよ.