

2010年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

[I] 次の に適する数を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) 微分して

$$\frac{d}{dx} \log(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = \frac{\overline{\text{ア}}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx} (x\sqrt{4x^2 + 1}) = 2\sqrt{4x^2 + 1} - \frac{\overline{\text{イ}}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

となる。これを利用すれば、

$$\int_0^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx = \overline{\text{ウ}}$$

である。

(2) 連続関数 $f(x)$ が関係式

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2(e-1)} \int_0^1 e^{-y} f(y) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} f(y) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(\pi y) dy$$

をみたすとき、 $f(x)$ は次のようにして決定できる。まず、

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(\pi y) dy = \overline{\text{エ}}$$

である。次に、

$$f(x) = Ae^{2x} + B \quad (A, B \text{ は定数})$$

とおくと、

$$\int_0^1 e^{-y} f(y) dy = \overline{\text{オ}} A + \overline{\text{カ}} B,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(y) dy = \overline{\text{キ}} A + \overline{\text{ク}} B$$

である。したがって、上の関係式から、 A, B についての連立1次方程式を得る。その解を求めると、

$$A = \overline{\text{ケ}}, B = \overline{\text{コ}}$$

となる。

[II] 座標空間内の互いに異なる4点 A, B, C, D について

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$$

が成立しているとする. また, 線分 AB, CD, AD, BC の中点をそれぞれ M, N, K, L とする. ただし, M と N , および K と L はそれぞれ異なる点である. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ を用いて表せ.
- (2) 内積 $\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$ を計算せよ.
- (3) $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) と $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{BD}$ のなす角 β ($0 \leq \beta \leq \pi$) が等しいことを示せ.
- (4) $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{KL}$ のなす角を計算せよ.

[III] 行列 A, B, E, O を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $A^2 - 5A + 4E = O$ が成立することを示せ。
- (2) 正の2実数 x, y に対し $Z = xA + yE$ とする。 $Z^2 = A$ が成立するように x, y を定めよ。
- (3) 任意の2次の正方行列 W について、等式 $BW = WB$ が成立すれば $W = uB + vE$ (u, v は実数) と表せることを示せ。
- (4) 等式 $Y^2 = B$ をみたす2次の正方行列 Y は存在しないことを示せ。

[IV] 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x^2)^k$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $0 < x < 1$ である x について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を計算せよ．

(2) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2}$ を計算せよ．

(3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して次の不等式が成立することを示せ．

$$0 < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right) dx < \frac{1}{4n+3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{4n+3}$$

(4) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2k+1}$ が成立することを示せ．

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{3} \right)^k$ を計算せよ．