

〔I〕

〔解答〕

ア, 2 イ, 1 ウ, 2 エ, -1 オ, 1

カ, 1 キ, $2\sqrt{5}$ ク, 0 ケ, $\frac{2}{\sqrt{5}}$ コ, $\frac{20}{3}$

〔解説〕

(1)

$f(x) = x^2 + a$ であるから,

$$\log_{10} f(0) + \log_{10} f(1) = \log_{10} f(2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} a + \log_{10} (a+1) = \log_{10} (a+4) \quad \cdots \text{①}$$

となるが, まず, ①の真数条件より,

$$\begin{cases} a > 0 \\ a+1 > 0 \Leftrightarrow a > 0 \\ a+4 > 0 \end{cases}$$

を満たさなければならない。この条件のもと, ①を同値変形すると,

$$\text{①} \Leftrightarrow \log_{10} a(a+1) = \log_{10} (a+4)$$

$$\Leftrightarrow a(a+1) = a+4$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \quad (\because a > 0)$$

となり, a の値が求まる。このとき,

$$\log_{10} f(4) = \log_{10} (16+2) = \log_{10} 2 \cdot 3^2 = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 = \log_{10} f(0) + 2\log_{10} f(1)$$

となるから, $h=1, k=2$ となる。

また,

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^3 = 15 - 0 = 15$$

であるから,

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\int_0^3 f(x) dx \right) &= \log_{10} 15 \\ &= \log_{10} \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= -\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 1 \\ &= -\log_{10} f(0) + \log_{10} f(1) + 1 \end{aligned}$$

となるため, $m=-1, n=1, j=1$ と求まる。

(2)

$\triangle OPQ$ の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OP}|^2 |\overline{OQ}|^2 - (\overline{OP} \cdot \overline{OQ})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 49 - (4+3+12)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{80} = 2\sqrt{5}$$

となる。また, $\overline{OP}, \overline{OQ}$ に直交する長さ1のベクトルを $\vec{n} = \left(x, y, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ とおくと, $\overline{OP}, \overline{OQ}$ に

直交する条件から,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overline{OP} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overline{OQ} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \\ 2x + 3y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 0, y = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

と求まってしまうが, このとき, 長さが1である条件

$$\begin{aligned} &|\vec{n}| = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{5} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

を満たすから, 適する。よって, $\triangle OPQ$ を底面としたとき四面体 $OPQR$ の高さを h とおくと,

$$h = |\overline{OR} \cdot \vec{n}| = \left| \frac{12}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5}$$

と求まるから, 四面体 $OPQR$ の体積は,

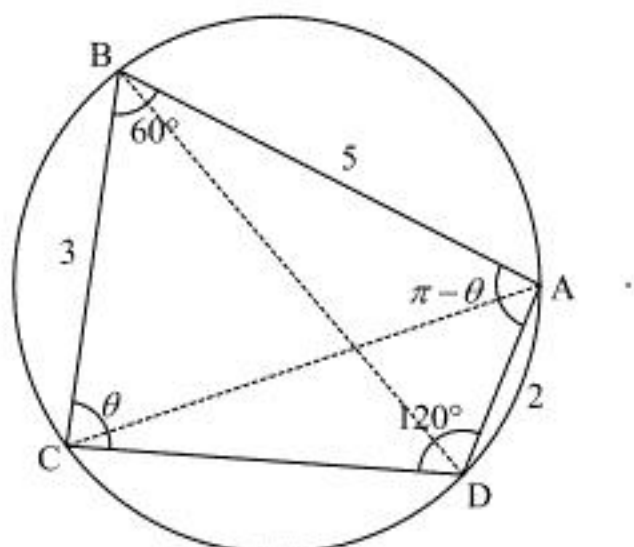
$$\frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{20}{3}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

(1)

円に内接する四角形 ABCD を図示すると、以下の図のようになる。



四角形 ABCD は円に内接しているから、

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$$

となる。 $CD = x$ とおくと、 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ について余弦定理から、

$$\begin{aligned} \begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ AC^2 = DA^2 + CD^2 - 2 \cdot DA \cdot CD \cos \angle ADC \end{cases} \\ \Leftrightarrow 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 60^\circ = 4 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) = 0 \\ \therefore x = 3 (\because x > 0) \end{aligned}$$

を得る。

(答) $CD = 3$

(2)

求める面積は、 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の面積の和であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin \angle ABC + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \sin \angle ADC &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \sin 120^\circ \\ &= \frac{15}{4} \sqrt{3} + \frac{3}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{21}{4} \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{21}{4} \sqrt{3}$

(3)

$\angle BCD = \theta$ とする。四角形 ABCD の面積は $\triangle BCD$ と $\triangle ABD$ の面積の和であるから、(2)より

$$\begin{aligned} \frac{21}{4} \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \sin \angle BCD + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DA \sin \angle BAD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \sin (180^\circ - \theta) \\ &= \frac{19}{2} \sin \theta \\ \therefore \sin \theta &= \frac{21}{38} \sqrt{3} \end{aligned}$$

を得る。よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{21}{38} \sqrt{3} = \frac{189}{76} \sqrt{3}$$

となる。

(答) $\frac{189}{76} \sqrt{3}$

(4)

$\triangle BCD$ 、 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cos \theta \\ BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2 \cdot AB \cdot DA \cos (180^\circ - \theta) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} BD^2 = 18 - 18 \cos \theta \\ BD^2 = 29 + 20 \cos \theta \end{cases} \\ \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{11}{38} \end{aligned}$$

となる。これを再び $\triangle BCD$ の余弦定理から導出される式に代入すると、

$$BD^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \left(-\frac{11}{38} \right) = \frac{441}{19}$$

$$\therefore BD = \frac{21}{19} \sqrt{19}$$

を得る。

(答) $\frac{21}{19} \sqrt{19}$

〔Ⅲ〕

(1)

コインを 5 回投げたとき、面の出方の総数は、

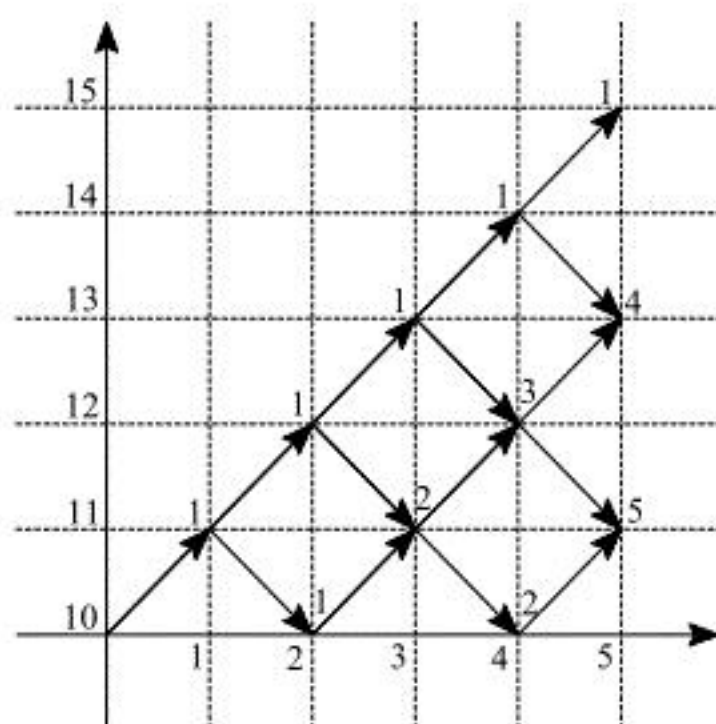
$$2^5 = 32 \text{ [通り]}$$

である。

(答) 32 通り

(2)

コインを投げた後の皿のアメ玉の個数が一度も 10 個未満にならないコインの面の出方は、下図のように横軸をコインを投げた回数、縦軸をアメ玉の個数にとったグラフ上において各矢印のように辿る経路に 1 対 1 対応する。



したがって、求める場合の数は

$$1+4+5=10 \text{ [通り]}$$

であることがわかる。

(答) 10 通り

(3)

子供がアメ玉をちょうど 11 個受け取るとき、コインの表の面が出た数を m 、コインの裏の面が出た数を n とすると、

$$\begin{cases} m-n=11-10 \\ m+n=5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$$

となるから、コインの表の面と、裏の面が同じ確率で出るとき、求める確率は、

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

である。

(答) $\frac{5}{16}$