

〔 I 〕

〔解答〕

$$\begin{array}{llll} \text{ア} & (\sin \alpha - \sin \beta)(x - \cos \beta) & \text{イ} & \frac{1}{2} \quad \text{ウ} \quad \frac{1}{2} \quad \text{エ} \quad \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \text{オ} & \sqrt{2} + 1 & \text{カ} & \frac{\pi}{4} \quad \text{キ} \quad \sqrt{2} - 1 \quad \text{ク} \quad \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ \text{ケ} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \text{コ} & \frac{\pi}{12} \end{array}$$

〔解説〕

2 点 P, Q を通る直線の法線ベクトルとして, $\overrightarrow{PQ} = (\cos \beta - \cos \alpha, \sin \beta - \sin \alpha)$ に垂直なベクトル $(-(\sin \beta - \sin \alpha), \cos \beta - \cos \alpha)$ がとれるから, この直線の方程式は,

$$\begin{aligned} & -(\sin \beta - \sin \alpha)(x - \cos \beta) + (\cos \beta - \cos \alpha)(y - \sin \beta) = 0 \\ & \therefore (\cos \alpha - \cos \beta)(y - \sin \beta) = (\sin \alpha - \sin \beta)(x - \cos \beta) \end{aligned}$$

となる。

次に, $PQ = 1$ なる条件より,

$$\begin{aligned} PQ &= 1 \\ \Leftrightarrow (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) &= 1 \\ \therefore \cos(\beta - \alpha) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。よって, $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$ と合わせて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であることがわかる。また, 線分 AP の長さ L を α で表すと,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2} \\ &= \sqrt{3 + 2\sin \alpha + 2\cos \alpha} \\ &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

となるから, $0 \leq \alpha < 2\pi$ の範囲で考えると,

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad (\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}) \text{ のとき, } L \text{ は最大値 } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad (\Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{4}\pi) \text{ のとき, } L \text{ は最小値 } \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

をとることがわかる。

さらに, $\overrightarrow{AP} = (\cos \alpha + 1, \sin \alpha + 1)$, $\overrightarrow{AQ} = (\cos \beta + 1, \sin \beta + 1)$ であるから, $\triangle APQ$ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(\cos \alpha + 1)(\sin \beta + 1) - (\sin \alpha + 1)(\cos \beta + 1)| \\ &= \frac{1}{2} |\sin(\beta - \alpha) + \cos \alpha - \cos \beta - \sin \alpha + \sin \beta| \\ &= \frac{1}{2} \left| 2\sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \\ &= \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \right| \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\beta - \alpha)}{2}} \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \end{aligned}$$

と求まる。ここで, $\cos(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}$ より $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \frac{5}{3}\pi$ であるから, 各場合それぞれについて考えることで, S の最大値を求めることにする。以下, α, β は $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ の範囲を動くことに注意する。

[1] $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$ のとき

S の式に $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$ を代入すると,

$$S = \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{5}{12}\pi\right) \right|$$

となるから, $0 \leq \alpha < 2\pi - \frac{\pi}{3}$ の範囲で考えると,

$$\sin\left(\alpha + \frac{5}{12}\pi\right) = 1 \quad (\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}) \text{ のとき, } S \text{ は最大値 } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

をとることがわかる。

[2] $\beta = \alpha + \frac{5}{3}\pi$ のとき

S の式に $\beta = \alpha + \frac{5}{3}\pi$ を代入すると,

$$S = \frac{1}{2} \left| \cos \frac{5}{6}\pi + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{13}{12}\pi\right) \right|$$

となるから, $0 \leq \alpha < 2\pi - \frac{5}{3}\pi \left(= \frac{\pi}{3}\right)$ の範囲では, S は

$$\frac{1}{2} \left| \cos \frac{5}{6}\pi + \sqrt{2} \sin\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{13}{12}\pi\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よりも小さいことがわかる。

以上[1], [2]より, $\alpha = \frac{\pi}{12}$ のとき, S は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ をとることがわかる。

〔Ⅱ〕

(1)

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + a + b$ の頂点の座標を (X, Y) とおく。関数 $f(x)$ を平方完成することにより、

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + a + b \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + a + b \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{cases} X = -\frac{b}{2a} \\ Y = -\frac{b^2}{4a} + a + b \end{cases}$$

である。

まず、 $Y \neq 0$ であることを示す。 $Y = 0$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{4a} + a + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 4ba - b^2 &= 0 \quad (\because a \neq 0) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}b \end{aligned}$$

となるが、これは a, b が 0 でない整数であることに矛盾する。したがって、 $Y \neq 0$ である。

以上の考察より、

放物線 $y = f(x)$ の頂点が第 1 象限あるいは第 4 象限に存在する

$$\Leftrightarrow X > 0$$

となり、このとき、

$$\begin{aligned} X &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b}{a} &< 0 \\ \Leftrightarrow a, b &\text{は異符号} \end{aligned}$$

であるから、結局、 a, b が異符号となるような確率を求めればよいことになる。

カードの取り出し方は全部で $6 \cdot 5 = 30$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。また、この中で a, b が異符号となるようなカードの取り出し方は、

$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 \text{ [通り]}$$

あるから、求める確率は、

$$\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

となる。

(答) $\frac{3}{5}$

(2)

(1)での考察より、

放物線 $y = f(x)$ の頂点が第 4 象限に存在する

$$\Leftrightarrow X > 0 \text{ かつ } Y < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \text{ かつ } (Y =) -\frac{b^2}{4a} + a + b < 0$$

$$\Leftrightarrow a, b \text{ が異符号 かつ } (Y =) \frac{4a^2 + 4ab - b^2}{4a} < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、①を満たすような組 (a, b) の総数を求めればよい。

まず、(1)より、 a, b が異符号となるような組 (a, b) の総数は、18 通りある。また、(1)より、

$$Y \neq 0$$

であるから、 a, b が異符号となるような組 (a, b) に対して、

$$Y > 0 \text{ または } Y < 0$$

のどちらか一方が成り立つ。さらに、上の変形より、 $Y = \frac{4a^2 + 4ab - b^2}{4a}$ となるから、代入計算

を行うことにより、

$$(a, b) \text{ に対して、 } Y = \frac{4a^2 + 4ab - b^2}{4a}$$

$$(-a, -b) \text{ に対して、 } Y = -\frac{4a^2 + 4ab - b^2}{4a}$$

となるため、 $Y > 0$ となる組 (a, b) と、 $Y < 0$ となる組 $(-a, -b)$ は 1 対 1 対応する。したがって、

$Y > 0$ となる組の総数と、 $Y < 0$ となる組の総数は等しいことがわかるから、①を満たす組

(a, b) の総数は、

$$\frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ [通り]}$$

となるため、求める確率は、

$$\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

である。

(答) $\frac{3}{10}$

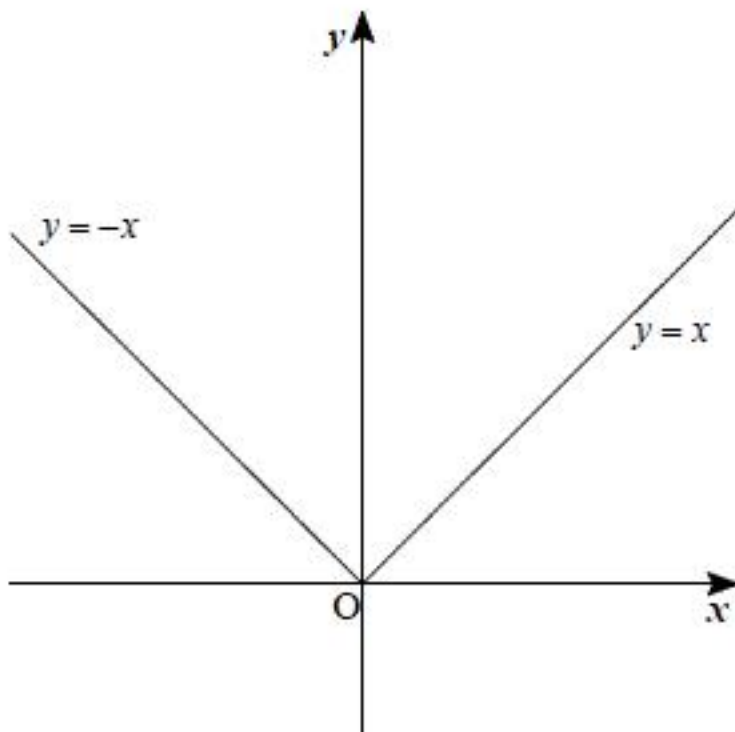
〔Ⅲ〕

(1)

$y=|x|$ を場合分けすることによって表すと、

$$y=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

となるから、 $y=|x|$ のグラフを描くと、以下の図のようになる。



(答) 前図

(2)

$0, x, x+1$ の大小で場合分けすることで、 $\int_x^{x+1} |t| dt$ を計算する。

[1] $0 \leq x$ ($\Leftrightarrow x \geq 0$) の場合

$x \leq t \leq x+1$ の範囲では、 $|t|=t$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} |t| dt &= \int_x^{x+1} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_x^{x+1} \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 - \frac{1}{2} x^2 \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

[2] $x < 0 < x+1$ ($\Leftrightarrow -1 < x < 0$) の場合

$x \leq t < 0$ の範囲では $|t| = -t$ 、 $0 \leq t \leq x+1$ の範囲では $|t| = t$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} |t| dt &= \int_x^0 (-t) dt + \int_0^{x+1} t dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_x^0 + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{x+1} \\ &= x^2 + x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

[3] $x+1 \leq 0$ ($\Leftrightarrow x \leq -1$) の場合

$x \leq t \leq x+1$ の範囲では、 $|t| = -t$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} (-t) dt &= \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_x^{x+1} \\ &= -\frac{1}{2} (x+1)^2 + \frac{1}{2} x^2 \\ &= -x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

以上[1]~[3]より、

$$\int_x^{x+1} |t| dt = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ x^2 + x + \frac{1}{2} & (-1 < x < 0) \\ -x - \frac{1}{2} & (x \leq -1) \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(答) \int_x^{x+1} |t| dt = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ x^2 + x + \frac{1}{2} & (-1 < x < 0) \\ -x - \frac{1}{2} & (x \leq -1) \end{cases}$$

(3)

$f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} 2t^2 dt + x \int_x^{x+1} |t| dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_x^{x+1} + x \int_x^{x+1} |t| dt \\ &= \frac{2}{3} (x+1)^3 - \frac{2}{3} x^3 + x \int_x^{x+1} |t| dt \\ \therefore f(x) &= 2x^2 + 2x + \frac{2}{3} + x \int_x^{x+1} |t| dt \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、(2)の結果より、 $x \geq 0$ の場合は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2x + \frac{2}{3} + x \left(x + \frac{1}{2} \right) \\ &= 3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) f(x) = 3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}$$

(4)

①と(2)の結果より、 $-1 < x < 0$ の場合は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2x + \frac{2}{3} + x \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) \\ &= x^3 + 3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}$$

(5)

①と(2)の結果より、 $x \leq -1$ の場合は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2x + \frac{2}{3} + x \left(-x - \frac{1}{2} \right) \\ &= x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$$