

II

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad \frac{1}{5} \qquad \text{イ} \quad \frac{1}{10} \qquad \text{ウ} \quad 6 \quad \text{エ} \quad \frac{17}{2}$$

$$(2) \quad \text{オ} \quad (-x^2+3x-2)e^{-x} \quad \text{カ} \quad (x^2-5x+5)e^{-x} \quad \text{キ} \quad 2 \quad \text{ク} \quad \frac{3}{e^2} \quad \text{ケ} \quad 1$$

$$\quad \quad \quad \text{コ} \quad \frac{1}{e}$$

〔解説〕

(1)

それぞれのカードの出方は同様に確からしいとする。異なる 5 枚のカードから異なる 2 枚を引くときの場合の数は全部で

$${}_5C_2 = 10 \text{ 通り}$$

ある。このうち引いた 2 枚のカードの数の和が 6 となるのは、2 枚のカードの数の組み合わせが (1, 5), (2, 4) となる場合の 2 通りであるから、そのようになる確率は

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

である。また、引いた 2 枚のカードの数の積が 6 となるのは、2 枚のカードの数の組み合わせが (2, 3) の場合のみであるから、そのようになる確率は

$$\frac{1}{10}$$

である。引いた 2 枚のカードの和が 3 となるカードの組み合わせは (1, 2) のみであり、和が 4 となるのは (1, 3) のみ、和が 5 となるのは (1, 4), (2, 3) となる場合、和が 7 となるのは (2, 5), (3, 4) となる場合、和が 8 となるのは (3, 5) のみ、和が 9 となるのは (4, 5) のみである。よって、引いた 2 枚のカードに書かれた数の和の期待値は

$$\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{10} = 6$$

である。引いた 2 枚のカードに書かれた数の積は 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20 があり得るが、すべての場合において該当するカードの組み合わせはそれぞれ 1 通りのみあるから、2 枚のカードの数の積の期待値は

$$(2+3+4+5+6+8+10+12+15+20) \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{2}$$

である。

(2)

$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$ であるとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)e^{-x} + (x^2-x+1) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (-x^2+3x-2)e^{-x} \\ &= -(x-1)(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x+3)e^{-x} + (-x^2+3x-2) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (x^2-5x+5)e^{-x} \end{aligned}$$

である。 $e^{-x} > 0$ であることも考慮して、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$

よって、 $f(x)$ は $x=2$ で極大値 $\frac{3}{e^2}$ をとり、 $x=1$ で極小値 $\frac{1}{e}$ をとる。

【Ⅲ】

- (1) $\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\text{OB}}=\vec{b}$ のとき、 $\triangle \text{OAB}$ の重心 G について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{\text{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

- (2) 点 Y は直線 XG 上に存在することから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OY}} &= t\overrightarrow{\text{OX}}+(1-t)\overrightarrow{\text{OG}} \\ &= t\cdot x\vec{a}+(1-t)\cdot \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) \\ &= \left(tx-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、 $\overrightarrow{\text{OY}}=y\vec{b}$ とおくと、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なベクトルであるから

$$\begin{cases} tx-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}=0 \\ \frac{1}{3}(1-t)=y \end{cases}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}tx-\frac{t}{3}+\frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x-1)t &= -1\end{aligned}$$

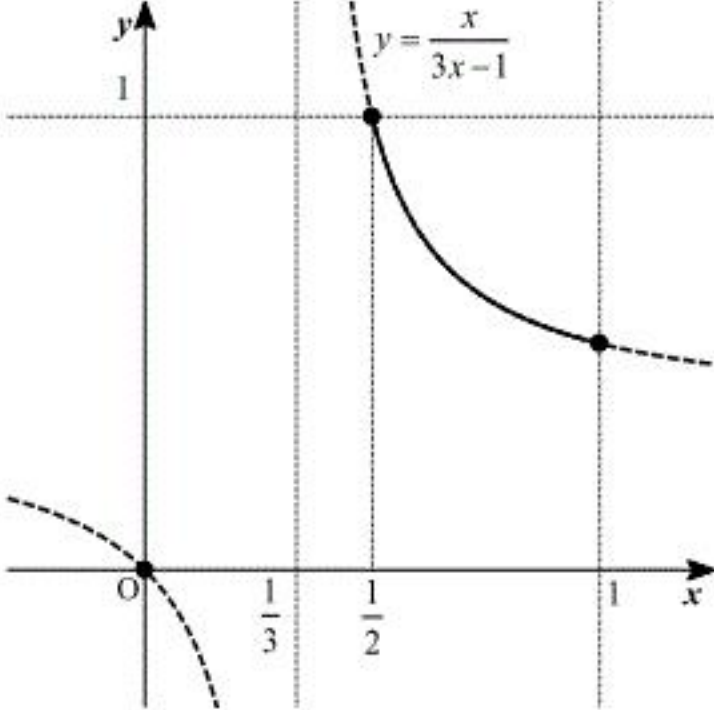
であるが、この式は $x=\frac{1}{3}$ のとき成立しないから、 $x\neq\frac{1}{3}$ のもとで

$$t=-\frac{1}{3x-1}$$

となる。よって

$$y=\frac{x}{3x-1}$$

と表される。また、点 X は線分 OA 上に存在することから $0\leq x\leq 1$ であり、点 Y が線分 OB 上にあるとき $0\leq y\leq 1$ が満たされる。 $y=\frac{x}{3x-1}$ を x の関数と見て、 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ を同時に満たす部分を図示すると、下図の実線部のようになる。



$y=\frac{x}{3x-1}$ と $y=1$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\frac{x}{3x-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから、求める x の値の範囲は

$$x=0, \frac{1}{2}\leq x\leq 1$$

である。

$$\text{(答)} \quad y=\frac{x}{3x-1}, \quad x=0, \frac{1}{2}\leq x\leq 1$$

- (3) x の値の範囲が(2)の結果をみたすとき、点 X は線分 OA を $x:1-x$ 、点 Y は OB を $y:1-y$ に内分するから、 $\triangle \text{OAB}$ の面積 S と $\triangle \text{OXY}$ の面積 T の比は

$$\begin{aligned}\frac{T}{S} &= xy \\ &= \frac{x^2}{3x-1}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{T}{S}=\frac{x^2}{3x-1}$$

- (4)

$\frac{T}{S}=\frac{x^2}{3x-1}=f(x)$ とおく。(2)の結果より、 $x=0, \frac{1}{2}\leq x\leq 1$ のもとで

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x(3x-1)-3\cdot x^2}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{3x\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(3x-1)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ における関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

さらに

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

よって、 $f(x)=\frac{T}{S}$ は $x=0$ のとき最小値 0 をとる。

$$\text{(答)} \quad \text{最小値 } 0 \ (x=0)$$

- (補足) (3), (4)について

$x=0$ のとき、 $\text{X}=\text{O}, \text{Y}=\text{O}$ となるから $\triangle \text{OXY}$ は成立しない。この場合を除外すると、(4)の結果は

$$x=\frac{2}{3} \text{ のとき最小値 } \frac{4}{9}$$

となる。

【III】

(1)

$k=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\int_0^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx \right]_0^{\pi} = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\pi} \cos kx dx = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$k=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{\pi}{2} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

$$\cos jx \cos kx = \frac{1}{2} \{ \cos(j+k)x + \cos(j-k)x \}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos jx \cos kx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ \cos(j+k)x + \cos(j-k)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(j+k)x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(j-k)x dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ より

$$\cos(j-k)x = \cos|j-k|x$$

となる。 j, k は互いに異なる自然数であるから、 $j+k, |j-k|$ はともに自然数となる。よって、

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(j+k)x dx &= 0 \\ \int_0^{\pi} \cos|j-k|x dx &= 0 \end{aligned}$$

となり

$$\int_0^{\pi} \cos jx \cos kx dx = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\pi} \cos jx \cos kx dx = 0$$

(4)

以上の結果を用いて、 $\left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx\right)^2$ の展開式における余弦関数の一次の項と

$\cos jx \cos kx$ ($j \neq k$) の項は定積分の計算において値が 0 となるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx\right)^2 dx &= \int_0^{\pi} dx + \sum_{k=1}^n k^2 \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= \pi + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

と推測される。ここで、 $f(n) = \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx\right)^2 dx$, $g(n) = \pi + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ において、

$n=1, 2, 3, \dots$ に対して $f(n) = g(n)$ が成立することを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1), (2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} (1 + 2\cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \pi + 2 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

となり、一方、

$$\begin{aligned} g(1) &= \pi + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

であることより、 $n=1$ のとき $f(n) = g(n)$ は成立する。

[2] $n=l$ のとき成立すると仮定したとき

$$\begin{aligned} f(l) &= g(l) \\ \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^l k \cos kx\right)^2 dx &= \pi + \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1) \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} f(l+1) &= \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{l+1} k \cos kx\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} \left\{1 + \sum_{k=1}^l k \cos kx + (l+1) \cos(l+1)x\right\}^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} \left\{ \left(1 + \sum_{k=1}^l k \cos kx\right)^2 + 2 \left(1 + \sum_{k=1}^l k \cos kx\right) (l+1) \cos(l+1)x + (l+1)^2 \cos^2(l+1)x \right\} dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^l k \cos kx\right)^2 dx + 2(l+1) \cdot 0 + 2(l+1) \cdot 0 + (l+1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \left\{ \pi + \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\} + (l+1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi + \frac{1}{6} (l+1)(l+2)(2l+3) \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= g(l+1) \end{aligned}$$

となり、 $n=l+1$ のときも $f(n) = g(n)$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} f(n) &= g(n) \\ \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx\right)^2 dx &= \pi + \frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

となることが示された。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx\right)^2 dx = \pi + \frac{\pi}{12} n(n+1)(2n+1)$$

[IV]

(1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x dx \\ &= \int_1^e (x)' \log x dx \\ &= [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= [x \log x - x]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $I_1 = 1$

(2)

部分積分法を用いて

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \\ &= \int_1^e (x)' (\log x)^{n+1} dx \\ &= [x (\log x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e x \cdot (n+1) (\log x)^n \frac{1}{x} dx \\ &= e - (n+1) \int_1^e (\log x)^n dx \\ &= -(n+1) I_n + e \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)

また、これを用いて

$$\begin{aligned} I_2 &= -2I_1 + e \\ &= e - 2 \\ I_3 &= -3I_2 + e \\ &= -2e + 6 \end{aligned}$$

となる。

(答) $I_2 = e - 2, I_3 = -2e + 6$

(3)

$1 \leq x \leq e$ において

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

は常に正の値をとることから、 $\log x$ は単調増加関数である。よって、 $\log x$ は

$$x = e \text{ のとき最大値 } \log e = 1$$

$$x = 1 \text{ のとき最小値 } \log 1 = 0$$

をとる。

(答) 最大値 $\log e = 1$, 最小値 $\log 1 = 0$

これより、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $1 \leq x \leq e$ のとき

$$0 \leq \log x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\log x)^n \leq 1$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} 0 &< \int_1^e (\log x)^n dx < \int_1^e dx \\ \Leftrightarrow 0 &< I_n < e - 1 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$0 < I_n < e - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であることが示された。

(証明終)

(4)

(1), (2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_2 = 1, a_3 = -2 \\ b_1 &= 1, b_2 = -2, b_3 = 6 \end{aligned}$$

である。また、 $I_{n+1} = -(n+1)I_n + e$ であることから、 $I_n = a_n e + b_n$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} e + b_{n+1} &= -(n+1)(a_n e + b_n) + e \\ &= \{1 - (n+1)a_n\} e - (n+1)b_n \end{aligned}$$

となり、 $a_{n+1}, 1 - (n+1)a_n, b_{n+1}, (n+1)b_n$ はすべて整数であり e は無理数であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -(n+1)a_n + 1 \\ b_{n+1} &= -(n+1)b_n \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 \\ &= (-n) \cdot \{- (n-1)\} \cdots (-2) \cdot 1 \\ &= (-1)^{n-1} n! \end{aligned}$$

であり、これは $n = 1$ のときも $b_1 = 1$ を満たす。

(答) $b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = 6, b_n = (-1)^{n-1} n!$

(5)

(3)の結果を用いて、 $I_n = a_n e + b_n$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &< a_n e + b_n < e - 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{b_n}{e} &< a_n < 1 - \frac{1}{e} - \frac{b_n}{e} \end{aligned}$$

である。

[1] n が奇数のとき

(4)の結果より、 $b_n > 0$ であるから

$$-\frac{1}{e} < \frac{a_n}{b_n} < -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{b_n}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$ であることから $n \rightarrow \infty$ とすると、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{e}$$

となる。

[2] n が偶数のとき

(4)の結果より、 $b_n < 0$ であるから

$$-\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < -\frac{1}{e}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$ であることから $n \rightarrow \infty$ とすると、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{e}$$

となる。

以上[1], [2]より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{e}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{e}$