

【1】

〔解答〕

- (1) ア $(3^a \log 3)(x-a)+3^a$ イ $-\frac{1}{3^a \log 3}(x-a)+3^a$
- (2) ウ 1 エ 3
 オ 5 カ 4
 キ $5-4 \cdot 3^n$ ク $20 \cdot 3^n - 20$
 ケ $1-3^n$ コ $5 \cdot 3^n - 4$

〔解説〕

(1)

$$(3^x)' = 3^x \log 3$$

より、点 $P(a, 3^a)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 3^a &= (3^a \log 3)(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= (3^a \log 3)(x - a) + 3^a \end{aligned}$$

であり、法線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 3^a &= -\frac{1}{3^a \log 3}(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{3^a \log 3}(x - a) + 3^a \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{pmatrix} -7-k & 40 \\ -2 & 11-k \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないときの k は、

$$\begin{aligned} (-7-k)(11-k) - (-2) \cdot 40 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(k-3) &= 0 \\ \therefore k &= 1, 3 \end{aligned}$$

であるから、 $k_1 < k_2$ より、

$$k_1 = 1, k_2 = 3$$

となる。また、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7a+40 \\ -2a+11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} &= k_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -7a+40 = a \\ -2a+11 = 1 \end{cases} \\ \therefore a &= 5 \end{aligned}$$

であり、同様に、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -7b+40 = 3b \\ -2b+11 = 3 \end{cases} \\ \therefore b &= 4 \end{aligned}$$

である。よって、

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \therefore B^{-1}A^nB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} A^n &= B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5-4 \cdot 3^n & 20 \cdot 3^n - 20 \\ 1-3^n & 5 \cdot 3^n - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

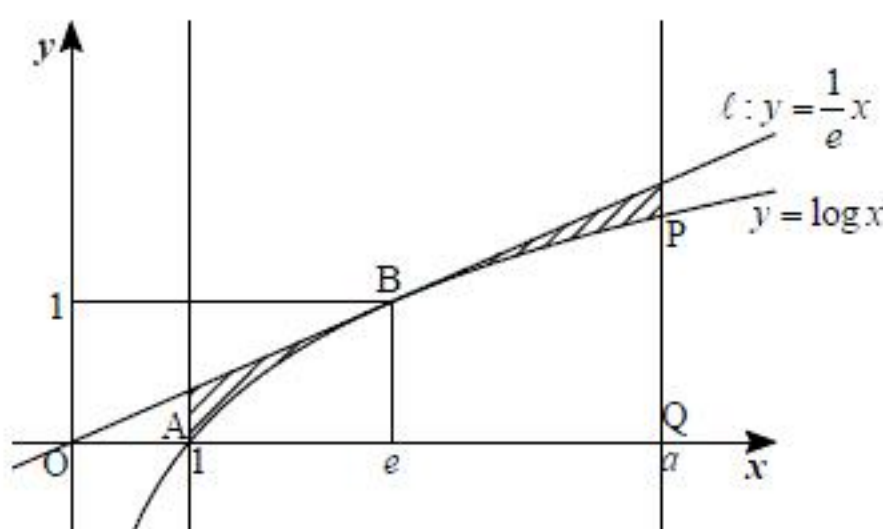
より、接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{1}{e}(x-e) \\ \therefore y &= \frac{1}{e}x \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{e}x$$

(2)



求める面積は上図の斜線部の面積であるから

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_1^a \left(\frac{1}{e}x - \log x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2e}x^2 - (x \log x - x) \right]_1^a \\ &= \frac{a^2-1}{2e} - a \log a + a - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2-1}{2e} - a \log a + a - 1$$

(3)

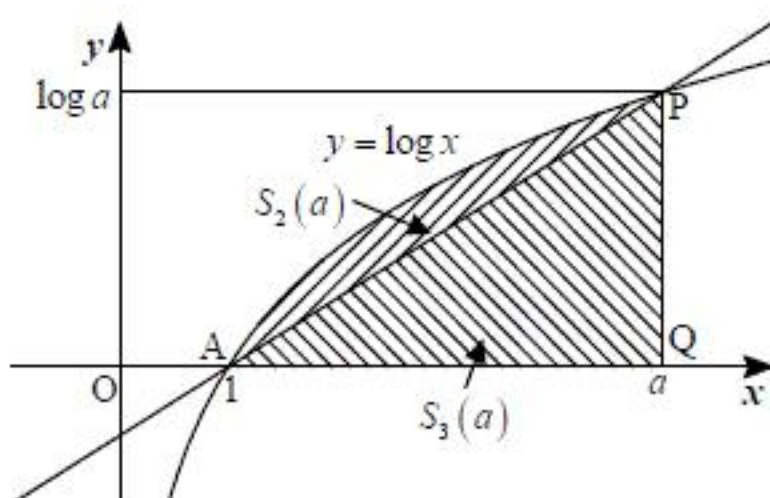
(2)の結果より、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1(a)}{a^2} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{a^2}}{2e} - \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2e} \left(\because \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a} = 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2e}$$

(4)



直線 AP の方程式は

$$y = \frac{\log a}{a-1}(x-1)$$

であるから、求める面積は、

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \int_1^a \left(\log x - \frac{\log a}{a-1}(x-1) \right) dx \\ &= \left[x \log x - x - \frac{\log a}{2(a-1)}(x-1)^2 \right]_1^a \\ &= a \log a - a - \frac{\log a}{2}(a-1) + 1 \\ &= \frac{\log a}{2}(a+1) - a + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\log a}{2}(a+1) - a + 1$$

(5)

前図より

$$S_3(a) = \frac{1}{2}(a-1) \log a$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_3(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log a}{2}(a+1) - a + 1}{\frac{1}{2}(a-1) \log a} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} - \frac{2}{\log a} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_3(a) = \frac{1}{2}(a-1) \log a$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_3(a)} = 1$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$s^2 - \frac{t^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow s^2 = 1 + \frac{t^2}{a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

を

$$\frac{s^2}{b^2} + t^2 = 1$$

に代入すると

$$\frac{1}{b^2} + \frac{t^2}{a^2 b^2} + t^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2 b^2 + 1)t^2 = a^2(b^2 - 1)$$

となり、 $b > 1$ より (右辺) > 0 だから、この方程式は実数解をもち、 $t > 0$ であったことから、

$$t = \sqrt{\frac{a^2(b^2 - 1)}{a^2 b^2 + 1}}$$

となる。これを①に代入して

$$s^2 = 1 + \frac{b^2 - 1}{a^2 b^2 + 1}$$

$$= \frac{b^2(a^2 + 1)}{a^2 b^2 + 1}$$

$$\therefore s = \sqrt{\frac{b^2(a^2 + 1)}{a^2 b^2 + 1}} \quad (\because s > 0)$$

を得る。

(答) $s = \sqrt{\frac{b^2(a^2 + 1)}{a^2 b^2 + 1}}$

$$t = \sqrt{\frac{a^2(b^2 - 1)}{a^2 b^2 + 1}}$$

(2)

$$L_1 : sx - \frac{ty}{a^2} = 1$$

$$L_2 : \frac{sx}{b^2} + ty = 1$$

より、 L_1 の傾きは $\frac{sa^2}{t}$ 、 L_2 の傾きは $-\frac{s}{tb^2}$ であるから、 L_1 と L_2 が直交するとき

$$\frac{sa^2}{t} \cdot \left(-\frac{s}{tb^2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2}{t^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

であるから、(1)の結果を代入して

$$\frac{b^2(a^2 + 1)}{a^2(b^2 - 1)} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + 2$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 + 2} \quad (\because b > 1)$$

を得る。

(答) $b = \sqrt{a^2 + 2}$

(3)

$b = \sqrt{a^2 + 2}$ であるとき、(1)より

$$s = \sqrt{\frac{(a^2 + 2)(a^2 + 1)}{a^2(a^2 + 2) + 1}} = \sqrt{\frac{(a^2 + 2)(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2 + 1}},$$

$$t = \sqrt{\frac{a^2(a^2 + 2 - 1)}{a^2(a^2 + 2) + 1}} = \sqrt{\frac{a^2(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2 + 1}}$$

$\dots \textcircled{2}$

となるので、

$$s^2 + t^2 = 1 + \frac{1}{a^2 + 1} + 1 - \frac{1}{a^2 + 1} = 2$$

となり、点 $P(s, t)$ は原点中心、半径 $\sqrt{2}$ の円の一部を動くことがわかる。また、 $a > 0$ のとき、 $b = \sqrt{a^2 + 2} > \sqrt{2} > 1$ となって、常に $b > 1$ は満たされることに注意する。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、②より、 s の変域は $1 < s < \sqrt{2}$ 、 t の変域は $0 < t < 1$ であるから、求める軌跡は円 $x^2 + y^2 = 2$ のうち $x > 1, y > 0$ の部分である。

(答) 円 $x^2 + y^2 = 2$ のうち $x > 1, y > 0$ の部分

〔Ⅳ〕

(1)

$$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

より

$$\begin{aligned}4\sin\frac{\pi}{12}&=4\left\{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}\\&=\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2&=8-4\sqrt{3}\\&=3+\left(5-4\sqrt{3}\right)\\&=3+\left(\sqrt{25}-\sqrt{48}\right)\\&<3\end{aligned}$$

であるから、両辺の正の平方根をとって、

$$4\sin\frac{\pi}{12}<\sqrt{3}$$

となる。

(答) $4\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$$4\sin\frac{\pi}{12}<\sqrt{3}$$

(2)

三角関数の和積公式より

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos\frac{x}{3}-\cos(a-x)\\&=-2\sin\left(\frac{3a-2x}{6}\right)\sin\left(\frac{4x-3a}{6}\right)\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0<x<\pi, 0\leq a\leq\frac{\pi}{3}$ より

$$-\frac{\pi}{3}<\frac{3a-2x}{6}<\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}<\frac{4x-3a}{6}<\frac{2}{3}\pi$$

であるから、①より $f'(x)=0$ となるのは

$$\begin{aligned}\frac{3a-2x}{6}=0, \frac{4x-3a}{6}=0\\ \therefore x=\frac{3}{4}a, \frac{3}{2}a\end{aligned}$$

のときである。

(答) $x=\frac{3}{4}a, \frac{3}{2}a$

(3)

①と(2)の結果より、 $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	0	…	$\frac{3}{4}a$	…	$\frac{3}{2}a$	…	π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\sin a$	$\nearrow$	極大 $4\sin\frac{a}{4}$	$\searrow$	極小 $2\sin\frac{a}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin a$

ここで、

$$\begin{aligned}\sin a&=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\\\leq 2\sin\frac{a}{2}\end{aligned}$$

より

$$m(a)=\sin a$$

である。また

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin a&\geq\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin\frac{\pi}{3}\quad(\because 0\leq a\leq\frac{\pi}{3})\\&=\sqrt{3}\\4\sin\frac{a}{4}&\leq 4\sin\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

と(1)の結果より、

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin a>4\sin\frac{a}{4}$$

であるから

$$M(a)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin a$$

となる。

(答) $M(a)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\sin a$

$$m(a)=\sin a$$

(4)

$0\leq a\leq\frac{\pi}{3}$ において $\sin a$ は単調増加であるから、 $M(a)$ の最大値は

$$M(0)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

であり、最小値は

$$M\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

である。また $m(a)$ の最大値は

$$m\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、最小値は

$$m(0)=0$$

である。

(答) $M(a)$ の最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 最小値 $\sqrt{3}$

$$m(a) \text{ の最大値 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 最小値 } 0$$