

2011年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

[I] 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 1から5までの異なる整数の書かれた5枚のカードから2枚を同時に引く. このとき, 引いた2枚のカードに書かれた数の和が6である確率は, ア であり, 引いた2枚のカードに書かれた数の積が6である確率は, イ である. また, 引いた2枚のカードに書かれた数の和の期待値は, ウ であり, 引いた2枚のカードに書かれた数の積の期待値は, エ である.
- (2) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$ の第2次までの導関数は, $f'(x) =$ オ , $f''(x) =$ カ である. したがって, $f(x)$ は $x =$ キ で極大値 ク をとり, $x =$ ケ で極小値 コ をとる.

[II] $\triangle OAB$ の重心を G とし,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.

(2) 線分 OA 上に点 X をとり, 直線 XG と直線 OB が点 Y で交わるとする.

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{a}, \quad \overrightarrow{OY} = y\vec{b}$$

とおくとき, 実数 y を実数 x を用いて表せ. また, 交点 Y が線分 OB 上にあるための, x の範囲を求めよ.

(3) x の範囲は (2) で求めたものとする. $\triangle OAB$ と $\triangle OXY$ の面積をそれぞれ, S, T とするとき, $\frac{T}{S}$ を x を用いて表せ.

(4) x の範囲は (2) で求めたものとする. $\frac{T}{S}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

[III] 次の問いに答えよ.

(1) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\int_0^\pi \cos kx \, dx$ を計算せよ.

(2) $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\int_0^\pi \cos^2 kx \, dx$ を計算せよ.

(3) 互いに異なる $j = 1, 2, 3, \dots$ と $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\int_0^\pi \cos jx \cos kx \, dx$ を計算せよ.

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\int_0^\pi \left(1 + \sum_{k=1}^n k \cos kx \right)^2 dx$ の値を推測し,
それを数学的帰納法で証明せよ.

[IV] 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) 部分積分法により

$$I_{n+1} = -(n+1)I_n + e \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を示せ. また, I_2, I_3 の値を求めよ.

(3) $\log x$ の $1 \leq x \leq e$ における 最大値と最小値を求め, $\{I_n\}$ について

$$0 < I_n < e - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を示せ.

(4) 整数値をとる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$I_n = a_n e + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. b_1, b_2, b_3 の値を求めよ. さらに $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(5) 上の (4) で定めた $\{a_n\}, \{b_n\}$ について, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$