

2011年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

[I] 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) 曲線 $y = 3^x$ 上の点 $P(a, 3^a)$ における接線の方程式は $y = \text{ア}$ であり、また、法線の方程式は $y = \text{イ}$ である。

(2) 行列 A, E を

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。行列

$$A - kE = \begin{pmatrix} -7 - k & 40 \\ -2 & 11 - k \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たない k の値を、 k_1, k_2 ($k_1 < k_2$) とすると、 $k_1 = \text{ウ}$ 、 $k_2 = \text{エ}$ である。

$$A \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす a, b は、 $a = \text{オ}$ 、 $b = \text{カ}$ であり、この a, b に対し、

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき、 $B^{-1}AB$ を利用すれば、正の整数 n に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} \text{キ} & \text{ク} \\ \text{ケ} & \text{コ} \end{pmatrix}$$

となる。

[II] 実数 a が $a > e$ を満たすとし、曲線 $y = \log x$ ($x > 0$) 上に定点 $A(1, 0)$, $B(e, 1)$ と点 $P(a, \log a)$ をとる。また、 x 軸上に点 $Q(a, 0)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = \log x$ 上の点 B における接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 上の (1) で求めた接線 ℓ 、曲線 $y = \log x$ 、直線 $x = 1, x = a$ で囲まれる部分の面積 $S_1(a)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1(a)}{a^2}$ を求めよ。(必要なら $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a} = 0$ を使ってよい。)
- (4) 曲線 $y = \log x$ と線分 AP で囲まれる部分の面積 $S_2(a)$ を求めよ。
- (5) $\triangle APQ$ の面積 $S_3(a)$ と

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_3(a)}$$

を求めよ。

[III] 実数 a, b は $a > 0, b > 1$ を満たすとする. 2 曲線

$$C_1 : x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1, C_2 : \frac{x^2}{b^2} + y^2 = 1$$

の第 1 象限における交点を $P(s, t)$ とし, P における 2 曲線 C_1 と C_2 の接線をそれぞれ L_1, L_2 とする. 次の問いに答えよ.

- (1) s および t を a, b を用いて表せ.
- (2) 2 直線 L_1, L_2 が直交するとき, b を a で表せ.
- (3) 実数 a, b が (2) の条件を満たしながら変化するとき, P の軌跡を求めよ.

[IV] 実数 a ($0 \leq a \leq \frac{\pi}{3}$) に対し

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \sin(a - x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $4 \sin \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。また、 $4 \sin \frac{\pi}{12}$ と $\sqrt{3}$ のどちらが大きいかを判定せよ。
- (2) $f'(x) = 0$ となる x ($0 < x < \pi$) を求めよ。
- (3) $f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。
- (4) $M(a)$ と $m(a)$ ($0 \leq a \leq \frac{\pi}{3}$) のそれぞれについて最大値と最小値を求めよ。

以下余白