

2011年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は4ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (7) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

[I] 次の に適する数を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) 定数 A, B, C を

$$\frac{x^2 + 5}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

が成立するように選ぶと

$$A = \text{ア}, B = \text{イ}, C = \text{ウ}$$

である。したがって

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 5}{(x+1)^2(x-2)} dx = \text{エ}$$

である。

- (2) 3個のサイコロを同時に投げるとき、出る目の最大数が5以下になる確率は オ , 4以下になる確率は カ である。これより、出る目の最大数がちょうど6になる確率は キ , ちょうど5になる確率は ク である。したがって、3個のサイコロを同時に投げるときに、出る目の最大数の期待値は ケ である。

[II] 原点を O とする座標平面内で行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換 f を考える. この f によって, $P(1, 0), Q(0, 1)$ が移る点をそれぞれ P', Q' とすると, 線分 OP' と線分 OQ' の長さが等しいとする. また, f によって, 点 $(1, 2)$ はそれ自身に移るとする. 次の問いに答えよ.

- (1) a, c の満たす条件を求めよ. また, この条件を満たす図形を ac 平面に図示せよ.
- (2) 1 次変換 f によって, 点 $R(1, 1)$ が移る点を R' とする. また, 線分 OR' の長さを r とする. r の最大値および最小値とそのときの a, c の値, および点 R' の座標をそれぞれ求めよ.

[III] 座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面上に互いに異なる 3 点 A, B, C を取り,

$$\alpha = \angle AOC, \beta = \angle BOC, \theta = \angle AOB$$

とおく. ただし, 点 C の座標は $(0, 0, 1)$ とし, $0 < \alpha \leq \pi$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < \theta \leq \pi$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ とするとき,

$$a_3, \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

を α で表せ. また, $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ とするとき,

$$b_3, \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

を β で表せ.

- (2) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と $\cos(\alpha + \beta)$ の大小を判定せよ. ただし, 等号成立条件は述べなくてよい.
- (3) 上の (2) の結果を用いて, θ と $\alpha + \beta$ の大小を判定せよ. ただし, 等号成立条件は述べなくてよい.

[IV] 数列

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}, \dots$$

は漸化式

$$a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしている. $f(x) = (\sqrt{2})^x$ として次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 2$ における $f'(x)$ の最大値と最小値を求めよ.
- (3) $0 < a_n < 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成立することを数学的帰納法を用いて示せ.
- (4) $0 < 2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成立することを示せ.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

以下余白