

【Ⅰ】

【解答】

ア $\frac{3}{5}$ イ $\frac{4}{5}$

ウ 20 エ $\frac{7\sqrt{5}-\sqrt{85}}{4}$

オ $\frac{5\sqrt{85}}{8}$ カ $\left(\frac{15}{4}, \frac{35}{8}\right)$

キ $\left(1, \frac{14}{3}\right)$ ク $\frac{19}{108}$

ケ $\frac{13}{54}$ コ $\frac{7}{108}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= -10 + 40 \\ &= 30 \\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| &= \sqrt{5^2 + 10^2} \\ &= 5\sqrt{5} \\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} \\ &= \frac{30}{5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

と求まる。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、

$$\sin \theta > 0$$

より、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $\triangle \mathrm{AOB}$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \\ &= 5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 20\end{aligned}$$

である。内接円の半径を r とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(5+2)^2 + (10-4)^2} \\ &= \sqrt{85}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}(\sqrt{85} + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \cdot r \cdot \frac{1}{2} &= 20 \\ \Leftrightarrow (7\sqrt{5} + \sqrt{85})r &= 40 \\ \therefore r &= \frac{40}{7\sqrt{5} + \sqrt{85}} \\ &= \frac{40(7\sqrt{5} - \sqrt{85})}{245 - 85} \\ &= \frac{7\sqrt{5} - \sqrt{85}}{4}\end{aligned}$$

と求まる。また、外接円の半径を R とすると、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{\mathrm{AB}}{\sin \theta} \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{85} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{85}}{8}\end{aligned}$$

と求まる。辺 OA , OB の中点を M , N とし、 OA , OB の垂直二等分線を l , m とすると、

$$\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, 5\right), \mathrm{N}(-1, 2)$$

である。直線 OA , OB の傾きはそれぞれ、 2 , -2 であるから、直線 l , m の傾きは、それぞれ

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ である。したがって、}$$

$$\begin{aligned}l: y &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 5 \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{25}{4} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m: y &= \frac{1}{2}(x+1) + 2 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。 l , m の交点が外心であるので、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を連立して交点を求めると、

$$\left(\frac{15}{4}, \frac{35}{8}\right)$$

と求まる。また、重心の座標を G とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathrm{G}\left(1, \frac{14}{3}\right)$$

である。

(2)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ の判別式を D とすると、 $\textcircled{3}$ が 2 つの異なる実数解をもつ条件は、

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 4ac &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 &> 4ac \quad \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

であるから、上式を満たすような (a, b, c) を求める。

[1] $b=1, 2$ のとき、

このとき $\textcircled{4}$ を満たすような (a, b, c) は存在しない。

[2] $b=3$ のとき、

このとき、 $\textcircled{4}$ を満たすような (a, c) の組を考えると、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$$

の 3 通りである。

[3] $b=4$ のとき、

このとき、 $\textcircled{4}$ を満たすような (a, c) の組を考えると、

$$(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$$

の 5 通りである。

[4] $b=5$ のとき、

このとき、 $\textcircled{4}$ を満たすような (a, c) の組を考えると、

$$\begin{aligned}(a, c) &= (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &\quad (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), \\ &\quad (5, 1), (6, 1)\end{aligned}$$

の 14 通りである。

[5] $b=6$ のとき、

このとき、 $\textcircled{4}$ を満たすような (a, c) の組を考えると、

$$\begin{aligned}(a, c) &= (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &\quad (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), \\ &\quad (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\end{aligned}$$

の 16 通りである。

[1]~[5] より、 $\textcircled{4}$ を満たすような (a, b, c) の組は、

$$3 + 5 + 14 + 16 = 38 \text{ [通り]}$$

存在する。以上より、サイコロを 3 回投げ、出た目の数字を順に a, b, c とするとき、これらが

$\textcircled{4}$ 式を満たす確率は、

$$\frac{38}{6^3} = \frac{19}{108}$$

と求まる。次に、 $\log_{(a+b)} c$ が整数となる確率を求める。 $\log_{(a+b)} c$ が整数となるためには、 a, b, c が整数 k を用いて、

$$(a+b)^k = c \quad \cdots \textcircled{5}$$

を満たせばよい。

[1] $c=1$ のとき、

$k=0$ とすれば a, b の値に関わらず $\textcircled{5}$ 式を満たす。したがって、 $c=1$ のとき、常に $\textcircled{5}$ 式が成り立つ。よって、 $c=1$ のときに $\textcircled{5}$ 式を満たす (a, b) の組は、

$$6 \times 6 = 36 \text{ [通り]}$$

である。

[2] $c \neq 1$ かつ $a+b=2$ のとき、

このとき、

$$(a, b) = (1, 1)$$

であり、 $\textcircled{5}$ 式が成り立つためには、

$$c = 2, 4$$

となればよい。したがって、このとき $\textcircled{5}$ 式が成り立つ (a, b, c) の組み合わせは 2 通りである。

[3] $c \neq 1$, $a+b > 2$ のとき、

このとき、 $\textcircled{5}$ 式が成り立つ条件は、

$$a+b=c$$

となることである。上式を満たすような (a, b, c) の組は、

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 1, 3), (2, 2, 4), \\ &\quad (2, 3, 5), (2, 4, 6), (3, 1, 4), (3, 2, 5), (3, 3, 6), (4, 1, 5), \\ &\quad (4, 2, 6), (5, 1, 6)\end{aligned}$$

の 14 通りある。

[1], [2], [3] より、 $\textcircled{5}$ 式が成り立つような (a, b, c) の組み合わせは、

$$36 + 2 + 14 = 52 \text{ [通り]}$$

である。したがって、 $\log_{(a+b)} c$ が整数となる確率は、

$$\frac{52}{6^3} = \frac{13}{54}$$

と求まる。

ベクトル (a, b) とベクトル $(c, -1)$ が直交するとき、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow ac - b &= 0 \\ \therefore b &= ac\end{aligned}$$

が成り立つ。上式が成り立つような (a, b, c) の組み合わせは、

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), \\ &\quad (2, 2, 1), (2, 4, 2), (2, 6, 3), (3, 3, 1), (3, 6, 2), (4, 4, 1), \\ &\quad (5, 5, 1), (6, 6, 1)\end{aligned}$$

の 14 通りである。したがって、ベクトル (a, b) とベクトル $(c, -1)$ が直交する確率は、

$$\frac{14}{6^3} = \frac{7}{108}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$2\overline{x} + \overline{y} = \overline{a}$$

より,

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{x} &= (2\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{x} \\ &= 2\overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot \overline{x} \quad (\because \overline{x} \cdot \overline{y} = 0) \\ &= 2\overline{x} \cdot \overline{x} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overline{a} \cdot \overline{x} = 2\overline{x} \cdot \overline{x}$$

(2)

$$\overline{a} \cdot \overline{y} = (2\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{y}$$

より, $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{y} &= 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{y} \\ &= \overline{y} \cdot \overline{y} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と求まる。さらに

$$\begin{aligned}(2\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{a} &= \overline{a} \cdot \overline{a} \\ &= 49 + 81 \\ &= 130 \\ \Leftrightarrow 2\overline{x} \cdot \overline{a} + \overline{y} \cdot \overline{a} &= 130 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

である。ここで, $\overline{x}, \overline{y}$ は大きさが等しいので,

$$\overline{y} \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{x}$$

であるから, ①, ②を③に代入して,

$$\begin{aligned}2\overline{x} \cdot \overline{a} + \overline{y} \cdot \overline{a} &= 130 \\ \Leftrightarrow 4\overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot \overline{y} &= 130 \\ \Leftrightarrow 5\overline{x} \cdot \overline{x} &= 130 \\ \therefore \overline{x} \cdot \overline{x} &= 26 \quad \dots \textcircled{4} \\ \therefore \overline{x} \cdot \overline{a} = 2\overline{x} \cdot \overline{x} &= 52 \quad \dots \textcircled{5}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overline{x} \cdot \overline{x} = 26, \overline{x} \cdot \overline{a} = 52$$

(3)

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると, ④より,}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow 49x^2 + 49y^2 &= 26 \cdot 49 \quad \dots \textcircled{6}\end{aligned}$$

であり, ⑤より,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} &= 52 \\ \Leftrightarrow 7x + 9y &= 52 \\ \Leftrightarrow 7x &= 52 - 9y\end{aligned}$$

となるので, 上式の両辺を二乗して,

$$49x^2 = (52 - 9y)^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

となる。⑥に⑦を代入して,

$$\begin{aligned}(52 - 9y)^2 + 49y^2 &= 26 \cdot 49 \\ \Leftrightarrow 81y^2 + 49y^2 - 52 \cdot 9 \cdot 2y + 52^2 &= 26 \cdot 49 \\ \Leftrightarrow 26 \cdot 5y^2 - 52 \cdot 9 \cdot 2y + 26(-49 + 52 \cdot 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5y^2 - 36y + 55 &= 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 275}}{5} \\ \therefore y = 5, \frac{11}{5}\end{aligned}$$

と求まる。したがって,

$$\therefore \begin{cases} y = 5 \text{ のとき, } x = 1 \\ y = \frac{11}{5} \text{ のとき, } x = \frac{23}{5} \end{cases}$$

となる。さらに,

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} - 2\overline{x}$$

だから, 求める $\overline{x}, \overline{y}$ の成分は,

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ のとき, } \overline{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} \text{ のとき, } \overline{y} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{23}{5} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ のとき, } \overline{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} \text{ のとき, } \overline{y} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{23}{5} \end{pmatrix}$$

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

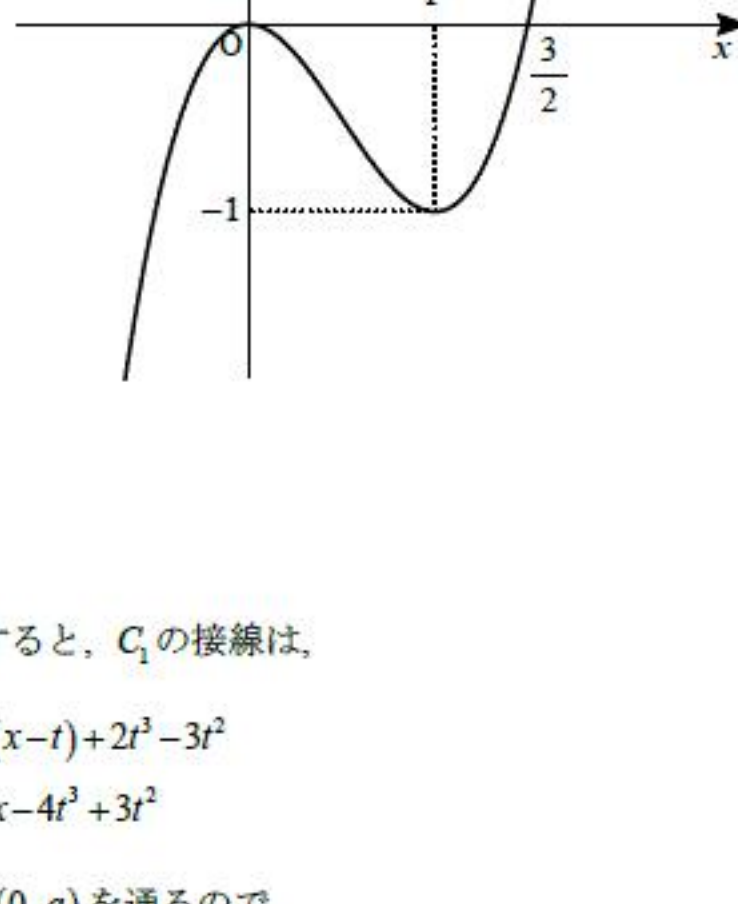
であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、増減表は次のとおりである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって、曲線 C_1 のグラフの概形は下記のとおりである。



(答) 前図参照

(2)

接点の x 座標を t とすると、 C_1 の接線は、

$$\begin{aligned} y &= (6t^2 - 6t)(x-t) + 2t^3 - 3t^2 \\ &= (6t^2 - 6t)x - 4t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$

と表せる。これが点 $(0, a)$ を通るので、

$$a = -4t^3 + 3t^2$$

が成り立つ。ここで、 $g(t) = -4t^3 + 3t^2$ とすると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12t^2 + 6t \\ &= -6t(2t-1) \end{aligned}$$

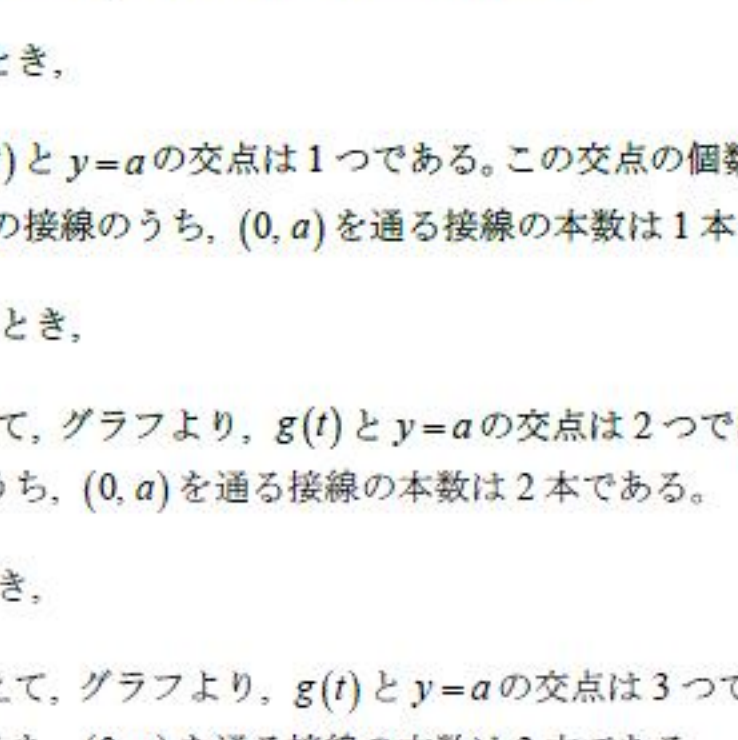
であるから、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $g(t)$ の増減表は下記のとおりである。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

よって、 $y = g(t)$ のグラフは、



となる。このグラフと直線 $y=a$ の交点を数えればよい。

[1] $a < 0, a > \frac{1}{4}$ のとき、

グラフより、 $g(t)$ と $y=a$ の交点は 1 つである。この交点の個数と求める接線の本数が一致するので、 C_1 の接線のうち、 $(0, a)$ を通る接線の本数は 1 本である。

[2] $a = 0, a = \frac{1}{4}$ のとき、

[1] と同様に考えて、グラフより、 $g(t)$ と $y=a$ の交点は 2 つである。したがって、このとき C_1 の接線のうち、 $(0, a)$ を通る接線の本数は 2 本である。

[3] $0 < a < \frac{1}{4}$ のとき、

[1] と同様に考えて、グラフより、 $g(t)$ と $y=a$ の交点は 3 つである。したがって、このとき C_1 の接線のうち、 $(0, a)$ を通る接線の本数は 3 本である。

[1], [2], [3] より、 C_1 のなかで点 $(0, a)$ を通る接線の本数は、

$$a < 0, \frac{1}{4} < a \text{ のとき, } 1 \text{ 本}$$

$$a = 0, \frac{1}{4} \text{ のとき, } 2 \text{ 本}$$

$$0 < a < \frac{1}{4} \text{ のとき, } 3 \text{ 本}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a < 0, \frac{1}{4} < a \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \\ a = 0, \frac{1}{4} \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \\ 0 < a < \frac{1}{4} \text{ のとき, } 3 \text{ 本} \end{cases}$$

(3)

[1] $x \geq 0$ のとき、

$$y = 2x^3 - 3x^2$$

である。

[2] $x < 0$ のとき、

$$y = -2x^3 - 3x^2$$

である

[1] は、(1) で考察したので、[2] について考える。このとき、

$$\begin{aligned} y &= -2x^3 - 3x^2 \\ y' &= -6x^2 - 6x \\ &= -6x(x+1) \end{aligned}$$

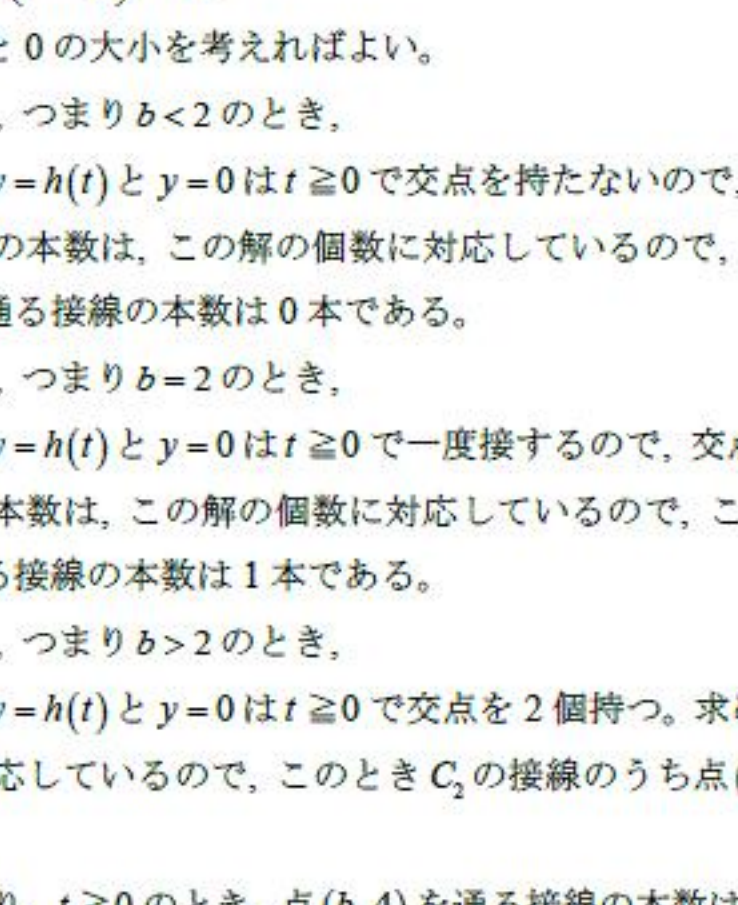
であるから、

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 0 \end{aligned}$$

となるので、 $x < 0$ のとき、 $y = f(|x|)$ の増減表は下記のとおりである。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)
y'	$-$	0	$+$	(0)
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	(0)

したがって、 $y = f(|x|)$ のグラフは、



となる。

(答) 前図参照

(4)

点 $(b, 4)$ を通り、点 $(t, f(t))$ で C_2 と接する直線を考える。 t の値で場合分けをして本数を数えていく。

[1] $t \geq 0$ のとき、

このとき接線の方程式は、(2) より、

$$y = (6t^2 - 6t)x - 4t^3 + 3t^2$$

である。これが点 $(b, 4)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 4 &= (6t^2 - 6t)b - 4t^3 + 3t^2 \\ \therefore 4t^3 - (6b+3)t^2 + 6bt + 4 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。接点の x 座標 t が 0 以上となる接線の本数は、①が $t \geq 0$ で持つ解の個数に対応している。①の左辺を $h(t)$ とおくと、

$$h'(t) = 12t^2 - 2(6b+3)t + 6b$$

となるので、

$$\begin{aligned} h'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t-1)(t-b) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}, b \left(b > \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $t \geq 0$ における $h(t)$ の増減表は下記のとおりである。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(t)$	$(+)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	4	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

これより、極小値 $h(b)$ と 0 の大小を考えれば、①の $t \geq 0$ での解の個数が分かる。

$$\begin{aligned} h(b) &= -2b^3 + 3b^2 + 4 \\ &= (-b+2)(2b^2+b+2) \end{aligned}$$

であるが、

$$2b^2+b+2 = 2\left(b+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$$

なので、 $-b+2$ と 0 の大小を考えればよい。

[i] $-b+2 > 0$ 、つまり $b < 2$ のとき、

このとき、 $y = h(t)$ と $y = 0$ は $t \geq 0$ で交点を持たないので、交点の個数は 0 個である。求める接線の本数は、この解の個数に対応しているので、このとき C_2 の接線のうち点 $(b, 4)$ を通る接線の本数は 0 本である。

[ii] $-b+2 = 0$ 、つまり $b = 2$ のとき、

このとき、 $y = h(t)$ と $y = 0$ は $t \geq 0$ で一度接するので、交点の個数は 1 個である。求める接線の本数は、この解の個数に対応しているので、このとき C_2 の接線のうち点 $(b, 4)$ を通る接線の本数は 1 本である。

[iii] $-b+2 < 0$ 、つまり $b > 2$ のとき、

このとき、 $y = h(t)$ と $y = 0$ は $t \geq 0$ で交点 2 個持つ。求める接線の本数は、この解の個数に対応しているので、このとき C_2 の接線のうち点 $(b, 4)$ を通る接線の本数は 2 本である。

[i], [ii], [iii] より、 $t \geq 0$ のとき、点 $(b, 4)$ を通る接線の本数は、

$$b < \frac{5}{2} \text{ のとき, } 0 \text{ 本}$$

$$b = \frac{5}{2} \text{ のとき, } 1 \text{ 本}$$

$$b > \frac{5}{2} \text{ のとき, } 2 \text{ 本}$$

である。

[1], [2] より、 C_2 の接線のうち点 $(b, 4)$ を通るものの本数は、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < b < 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 本} \\ b = 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \\ 2 < b < \frac{5}{2} \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \\ b = \frac{5}{2} \text{ のとき, } 3 \text{ 本} \\ b > \frac{5}{2} \text{ のとき, } 4 \text{ 本} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < b < 2 \text{ のとき, } 0 \text{ 本} \\ b = 2 \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \\ 2 < b < \frac{5}{2} \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \\ b = \frac{5}{2} \text{ のとき, } 3 \text{ 本} \\ b > \frac{5}{2} \text{ のとき, } 4 \text{ 本} \end{cases}$$