〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1) ア　$x=1$

イ　$-\frac{1}{2}<x<1$

ウ　2

(2) エ　4

オ　-2

カ　-2

キ　1

ク　$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

ケ　$\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

コ　11

〔解説〕

(1)

まず，関数 $f(x)$ の定義域は，

$$\begin{cases}2x+1>0\\4-x^2>0\end{cases}$$

$$\therefore -\frac{1}{2}<x<2 \qquad \cdots ①$$

である。

$$f(x)=\log_2(2x+1)+\frac{\log_2(4-x^2)}{\log_2\frac{1}{2}}$$

$$=\log_2(2x+1)-\log_2(4-x^2)$$

$$=\log_2\frac{2x+1}{4-x^2}$$

であるから，

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{4-x^2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=4-x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1 \quad (\because ①)$$

である。また，

$$f(x)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{4-x^2}<1 \quad (\because \text{底は}2>1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1<4-x^2 \quad (\because 4-x^2>0)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)<0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}<x<1 \quad (\because ①) \qquad \cdots ②$$

である。$t=2^x$ とおくと，②のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}<t<2$ であり，

$$y=4^x-2^{x+1}+3$$

$$=t^2-2t+3$$

$$=(t-1)^2+2$$

であるから，$t=1$ のとき，y は最小値 2 をとる。

(2)

$$g(\theta)=2\cos 3\theta-\cos 2\theta-4\cos^3\theta+4\cos\theta$$

$$=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-(2\cos^2\theta-1)-4\cos^3\theta+4\cos\theta$$

$$=4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-2\cos\theta+1$$

より，$(a,b,c,d)=(4,-2,-2,1)$ である。また，

$$g(\theta)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\theta-1)(2\cos^2\theta-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\pi \qquad (\because 0<\theta<\pi)$$

であるから，$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\pi\right)$ である。したがって，

$$s=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{9}{4}\pi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

である。また，

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

であるから，

$$t=\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$$

である。ℓ, m, n が正の整数であるとき，

$\cos\frac{\ell}{4}\pi$ と $\cos\frac{3}{4}n\pi$ の取りうる値は $\pm1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$

$\cos\frac{m}{3}\pi$ の取りうる値は $\pm\frac{1}{2}, \pm1$

であるから，

$$\cos\frac{\ell}{4}\pi=\cos\frac{m}{3}\pi=\cos\frac{3}{4}n\pi \ (=k \text{ とおく})$$

が成り立つならば，$k=\pm1$ である。

[1] $k=1$ のとき

ℓ, m, n の最小値は，それぞれ $\ell=8, m=6, n=8$ より，$\ell+m+n$ の最小値は 20 である。

[2] $k=-1$ のとき

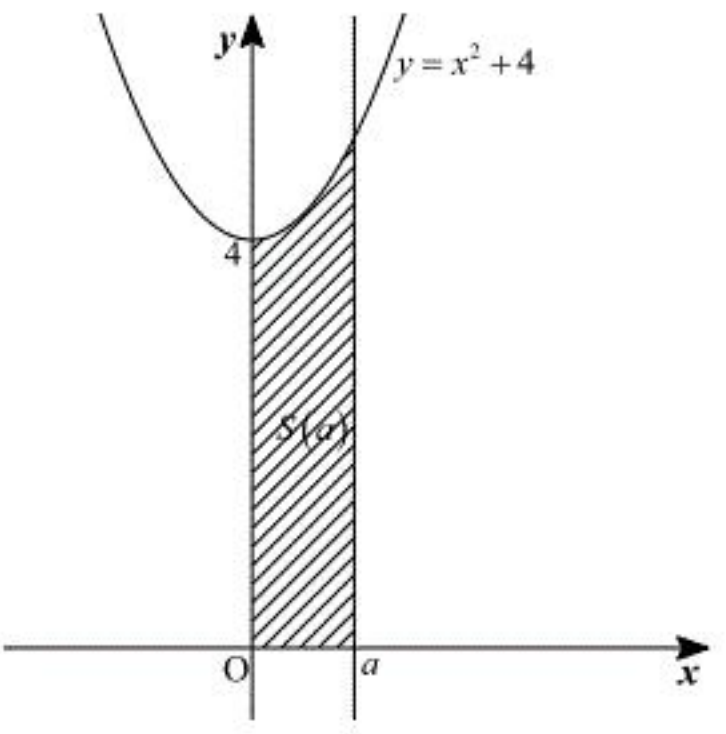
ℓ, m, n の最小値は，それぞれ $\ell=4, m=3, n=4$ より，$\ell+m+n$ の最小値は 11 である。

以上[1], [2]より，$\ell+m+n$ の最小値は 11 である。

〔Ⅱ〕

C:①, L:②とする。

(1)



求める面積は上図斜線部なので,

$$S(a)=\int_0^a\left(x^2+4\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3+4a$$

である。

(答) $S(a)=\frac{1}{3}a^3+4a$

(2)

①, ②より y を消去して,

$$x^2-x+4-b=0 \qquad \cdots ③$$

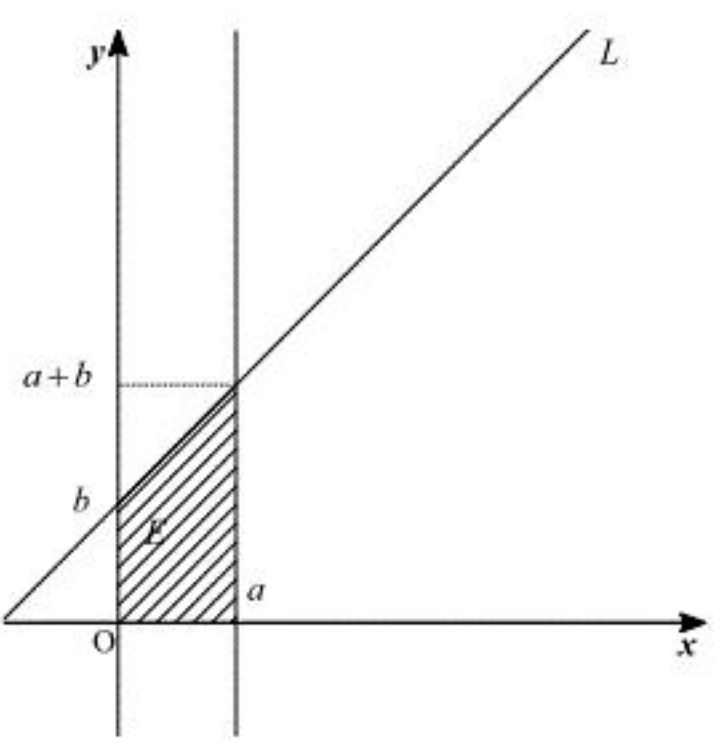
となる。[C, Lが接する] $\Leftrightarrow$ [③の判別式$D=0$]より,

$$D=1-4(4-b)=0$$
$$\therefore b=\frac{15}{4}$$

である。

(答) $b=\frac{15}{4}$

(3)



②に$x=a$を代入すると, $y=a+b$より, Lは点$(a, a+b)$を通る。Eは上底b, 下底$a+b$, 高さaの台形であるから, その面積は,

$$R(a)=\frac{1}{2}(b+a+b)a$$
$$=\frac{1}{2}a(a+2b)$$

である。$2R(a)=S(a)$となるとき,

$$2\left(\frac{1}{2}a^2+ab\right)=\frac{1}{3}a^3+4a$$
$$\Leftrightarrow a^2+2ab=\frac{1}{3}a^3+4a$$

$$\therefore b=\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a+2(\because a>0) \qquad \cdots ④$$

である。ここで, CとLが共有点を持たないので,

$$D<0$$
$$\Leftrightarrow 1-4(4-b)<0$$

$$\therefore b<\frac{15}{4} \qquad \cdots ⑤$$

である。④を⑤に代入して,

$$\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a+2<\frac{15}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2a^2-6a-21<0$$
$$\therefore \frac{3-\sqrt{51}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{51}}{2}$$

となる。$a>0$に注意して, 求める範囲は,

$$0<a<\frac{3+\sqrt{51}}{2}$$

である。

(答) $b=\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a+2$, $0<a<\frac{3+\sqrt{51}}{2}$

(4)

(3)より,

$$b=\frac{1}{6}\left(a^2-3a\right)+2$$
$$=\frac{1}{6}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{8}$$

である。$0<\frac{3}{2}<\frac{3+\sqrt{51}}{2}$より, bは, $a=\frac{3}{2}$のとき, 最小値$\frac{13}{8}$をとる。

(答) $a=\frac{3}{2}$のとき最小値$\frac{13}{8}$

〔Ⅲ〕

(1)

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}$ より,

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14},$$
$$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{16+4+36}=2\sqrt{14},$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4-6-12=-14$$

であるから,

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}$$
$$=\frac{-14}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

となる。よって,

$$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$$

である。

(答) $\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$

(2)

$$\overrightarrow{AB}=(-4+1,-2-3,6+2)$$
$$=(-3,-5,8)$$

であるから,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+25+64}$$
$$=7\sqrt{2}$$
$$\therefore AB=7\sqrt{2}$$

である。また, △OABの面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=7\sqrt{3}$$

である。

(答) AB$=7\sqrt{2}$, △OABの面積: $7\sqrt{3}$

(3)

Hは, 直線AB上にあるから, 実数kを用いて

$$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$$

と表すことができる。よって,

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$$
$$=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$$
$$=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\-5\\8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3k-1\\-5k+3\\8k-2\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

とおける。いま, OH⊥ABなので,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3k-1\\-5k+3\\8k-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-5\\8\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow -3(-3k-1)+(-5)\cdot(-5k+3)+8(8k-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 98k-28=0$$
$$\therefore k=\frac{2}{7}$$

である。これを①に代入して,

$$\overrightarrow{OH}=\left(-\frac{13}{7},\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right)$$

となる。したがって,

$$H\left(-\frac{13}{7},\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right)$$

である。また,

$$\left|\overrightarrow{OH}\right|=\sqrt{\frac{169}{7^2}+\frac{121}{7^2}+\frac{4}{7^2}}$$
$$=\sqrt{6}$$
$$\therefore OH=\sqrt{6}$$

である。

(答) H$\left(-\frac{13}{7},\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right)$, OH$=\sqrt{6}$

(4)

C(p,q,r)で, OC$=1$より,

$$p^2+q^2+r^2=1\quad\cdots②$$

である。また, OA⊥OC, OB⊥OCより,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-p+3q-2r=0\quad\cdots③$$
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-4p-2q+6r=0\quad\cdots④$$

である。③, ④より, qを消去すると,

$$-p+3(-2p+3r)-2r=0$$
$$\Leftrightarrow p=r$$

となる。これを③に代入すると,

$$-p+3q-2p=0$$
$$\Leftrightarrow p=q$$
$$\therefore p=q=r$$

となる。これを②に代入すると,

$$3r^2=1$$
$$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad(\because r>0)$$

となる。したがって, C$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$である。

(答) C$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(5)

三角錐C−OABの体積をVとおく。OA⊥OC, OB⊥OCより, 底面を△OAB, 高さをOCと考えると,

$$V=\frac{1}{3}\times 7\sqrt{3}\times 1=\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

である。一方, (2)より AB$=7\sqrt{2}$で, また, (4)より,

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1,\frac{1}{\sqrt{3}}-3,\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=15,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)-5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-3\right)+8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)$$
$$=-3+15+16$$
$$=28$$

である。よって,

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{7^2\cdot 2\cdot 15-28^2}$$
$$=\frac{7}{2}\sqrt{14}$$

である。Oから平面ABCに下ろした垂線の足がPであるので, 底面を△ABC, 高さをOPと考えると,

$$V=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot OP$$

より,

$$\frac{7}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\sqrt{14}\cdot OP$$
$$\therefore\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\frac{6}{7}}$$