

〔 I 〕

〔 解答 〕

- ア 0
 イ $-2-\sqrt{a_n+7}$
 ウ -2
 エ $-2+\sqrt{a_n+7}$
 オ $2n+5$
 カ n^2+4n
 キ $-2+\sqrt{n^2+4n+7}$
 ク $-4n$
 ケ $2n^2+15n+31$
 コ $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$

注：コは $\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$ でも可。

〔 解説 〕

$$\begin{cases} a_n > 0 \\ f(x) = x^3 + 6x^2 + (5 - a_n)x - 6 - 2a_n \end{cases}$$

において、 $f(-2) = -8 + 24 - 10 + 2a_n - 6 - 2a_n = 0$ より、

$$f(x) = (x+2)\{x^2 + 4x - (a_n + 3)\}$$

となる。よって、方程式 $f(x) = 0$ を解くと、

$$x = -2, -2 \pm \sqrt{a_n + 7}$$

となる。 $a_n > 0$ より、

$$\begin{cases} p_n = -2 - \sqrt{a_n + 7} \\ q_n = -2 \\ r_n = -2 + \sqrt{a_n + 7} \end{cases}$$

である。

$$\begin{cases} a_1 = 5, a_2 = 12 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \end{cases} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

のとき、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、

$$\textcircled{1} : a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2$$

より、

$$b_{n+1} = b_n + 2$$

となる。 $b_1 = 12 - 5 = 7$ より、数列 $\{b_n\}$ は、初項 7、公差 2 の等差数列で、

$$b_n = 7 + 2(n-1) = 2n + 5$$

となる。 $n \geq 2$ のとき、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ より、

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 5) \\ &= 5 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 5(n-1) \\ &= 5 + n^2 - n + 5n - 5 \\ &= n^2 + 4n \end{aligned}$$

を得る。 $a_1 = 5$ より、これは $n = 1$ のときにも成立するので、

$$a_n = n^2 + 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} r_n &= -2 + \sqrt{a_n + 7} \\ &= -2 + \sqrt{n^2 + 4n + 7} \end{aligned}$$

となる。 p_k, r_k は 2 次方程式 $x^2 + 4x - (a_k + 3) = 0$ の解より、

$$\begin{aligned} p_k + r_k &= -4, \\ p_k r_k &= -(a_k + 3) \\ &= -(k^2 + 4k + 3) \\ &= -(k+1)(k+3) \end{aligned}$$

であることに気をつけると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (p_k + r_k) &= -4n, \\ \sum_{k=1}^n p_k r_k &= -\sum_{k=1}^n (k^2 + 4k + 3) \\ &= -\left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n \right\} \\ &= -\frac{1}{6} n \{ (2n^2 + 3n + 1) + 12(n+1) + 18 \} \\ &= -\frac{1}{6} n (2n^2 + 15n + 31) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_k r_k} &= -\frac{1}{(k+1)(k+3)} \\ &= -\frac{(k+3) - (k+1)}{(k+1)(k+3)} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k r_k} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= -\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

円錐の頂点を A とし、A から底面に下ろした垂線の足を M とする。また、円錐を AM を通る平面で切ったとき、この平面と底面の円周との交点をそれぞれ B、C とし、球の中心を O とする。このとき、 $\angle OMB = 90^\circ$ より、

$$OM^2 + BM^2 = OB^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $2 \leq h < 4$ のとき、 $OB = 2$, $BM = r$, $OM = AM - OA = h - 2$ に気を付けると、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} (h-2)^2 + r^2 &= 2^2 \\ \therefore r &= \sqrt{4 - (h-2)^2} \quad (\because r > 0) \\ &= \sqrt{4h - h^2} \end{aligned}$$

である。 $0 < h < 2$ のときも、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。このとき、 $OB = 2$, $BM = r$, $OM = OA - AM = 2 - h$ より、

$$\begin{aligned} (2-h)^2 + r^2 &= 2^2 \\ \therefore r &= \sqrt{4h - h^2} \end{aligned}$$

である。よって、いずれの場合も、

$$r = \sqrt{4h - h^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad 0 < h < 2 \text{ のとき } r = \sqrt{4h - h^2}, \quad 2 \leq h < 4 \text{ のとき } r = \sqrt{4h - h^2}$$

(2)

円錐の体積 V は、

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

で求められ、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} h (4h - h^2) \\ &= \frac{\pi}{3} (4h^2 - h^3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{3} (4h^2 - h^3)$$

(3)

$$V = \frac{\pi}{3} (4h^2 - h^3) \text{ より、}$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (8h - 3h^2) = \frac{\pi}{3} h (8 - 3h)$$

である。 $V' = 0$ を解くと、 $h = 0, \frac{8}{3}$ となるから、次の増減表が得られる。

h	0	...	$\frac{8}{3}$	...	4
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

上表より、 V は $h = \frac{8}{3}$ のとき最大となり、そのときの値は、

$$V = \frac{256}{81} \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad h = \frac{8}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{256}{81} \pi$$

(4)

$$h = \frac{8}{3} \text{ のとき、} \textcircled{2} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{4 \times \frac{8}{3} - \frac{64}{9}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。よって、円錐の底面積 S_1 は、

$$S_1 = \pi r^2 = \frac{32}{9} \pi$$

である。円錐の底面の円周の長さは、

$$2\pi \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi$$

であり、円錐の母線の長さは、

$$\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

である。よって、側面を展開すると、半径 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 、弧の長さ $\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi$ の扇形となり、その面積 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

である。よって、求める表面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{32}{9} (1 + \sqrt{3}) \pi \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{32}{9} (1 + \sqrt{3}) \pi$$

〔Ⅲ〕

(1)

$P(x, y)$ とおく。 $AP = BP \Leftrightarrow AP^2 = BP^2$ となるとき、

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 &= (x-3)^2 + (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \\ \Leftrightarrow 2y &= (2a-6)x + 10 - a^2\end{aligned}$$

より、求める軌跡の方程式は、

$$y = (a-3)x + 5 - \frac{a^2}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (a-3)x + 5 - \frac{a^2}{2}$$

(2)

線分 AB の垂直二等分線 ℓ の方程式は①で表される。①を a について整理すると、

$$a^2 - 2xa + 6x + 2y - 10 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

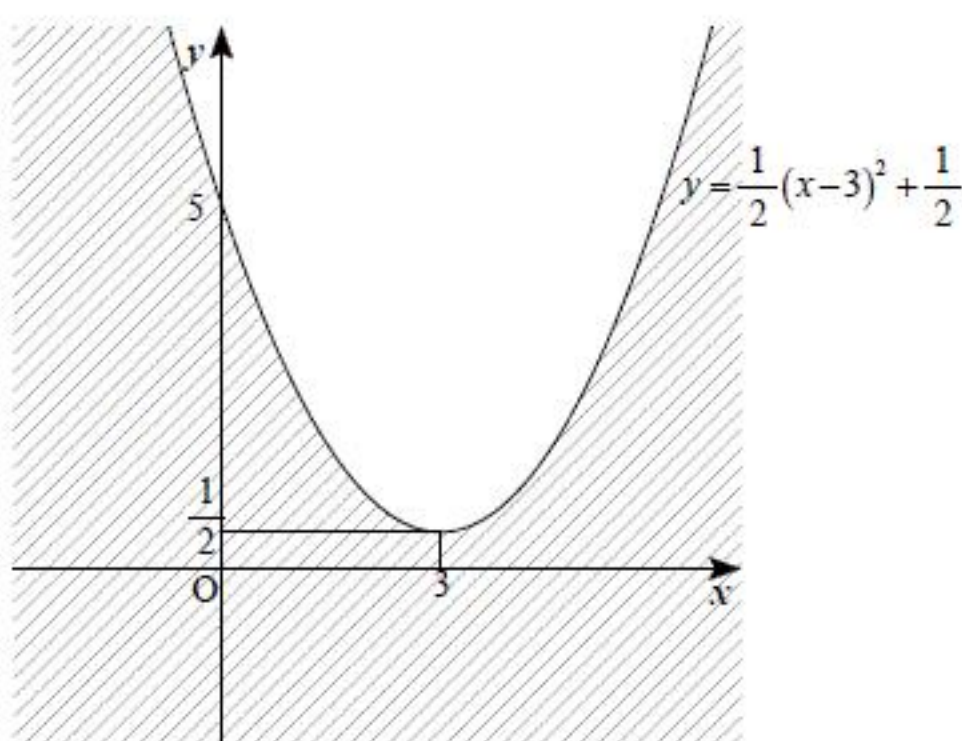
となる。②を a の 2 次方程式とみたとき、実数解をもてばよいので、②の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = x^2 - (6x + 2y - 10) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を解けばよい。③より、

$$y \leq \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。よって、求める領域は下図の斜線部ようになる（境界を含む）。



(答) 前図

(3)

②が $a \geq 0$ となる実数解を持てばよい。 $f(a) = a^2 - 2xa + 6x + 2y - 10$ とおくと、 $b = f(a)$ のグラフの軸は、直線 $a = x$ であるから、④のもとで、

$$「f(0) \leq 0」\text{または}「f(0) > 0 \text{かつ} x > 0」$$

をみたせばよい。 $f(0) = 6x + 2y - 10$ より、

$$\begin{aligned}f(0) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 6x + 2y - 10 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3x + y - 5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow y &\leq -3x + 5\end{aligned}$$

となる。したがって、④のもとで、

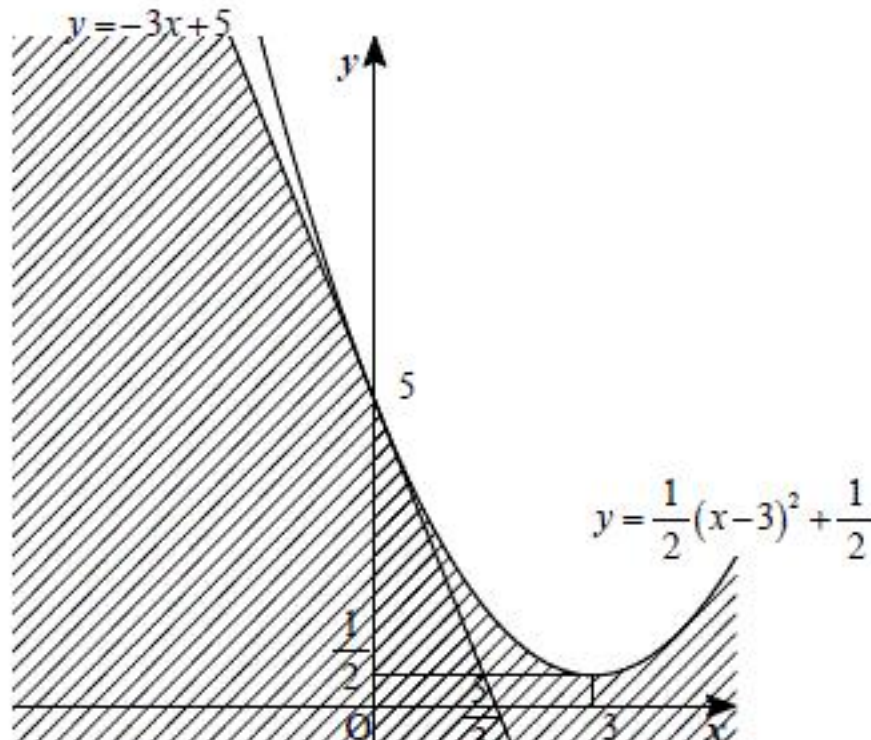
$$「y \leq -3x + 5」\text{または}「y > -3x + 5 \text{かつ} x > 0」$$

となる領域を図示すればよい。ここで、方程式

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2} = -3x + 5$$

を解くと、 $x = 0$ より、 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$ と $y = -3x + 5$ は、点 $(0, 5)$ で接することに注意する

と、求める領域は下図の斜線部ようになる（境界を含む）。



(答)前図

(4)

②が $0 \leq a \leq 5$ の範囲に解を 1 つだけ持てばよい。

[1] $D = 0$ のとき

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 10) \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。⑤を②に代入すると、

$$\begin{aligned}a^2 - 2xa + x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-x)^2 &= 0 \\ \therefore a &= x\end{aligned}$$

となる。よって、

$$0 \leq x \leq 5 \quad \cdots \textcircled{6}$$

であればよい。

[2] $D > 0$ のとき

$$y < \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{7}$$

となる。2 つの解のうち 1 つだけが $0 \leq a \leq 5$ を満たせばよい。すなわち、

$$「f(0) \geq 0 \text{かつ} f(5) < 0」\text{または}「f(0) < 0 \text{かつ} f(5) \geq 0」$$

をみたせばよい。(3)より、

$$f(0) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -3x + 5$$

である。また、

$$\begin{aligned}f(5) &= -4x + 2y + 15 < 0 \\ \Leftrightarrow y &< 2x - \frac{15}{2}\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、

$$\begin{aligned}&「\textcircled{5} \text{かつ} \textcircled{6}」\text{または}「\textcircled{7} \text{のもとで}『y \geq -3x + 5 \text{かつ} y < 2x - \frac{15}{2}』\text{または}『y < -3x + 5 \\ &\text{かつ} y \geq 2x - \frac{15}{2}』」\end{aligned}$$

である領域を図示すればよい。ここで、方程式

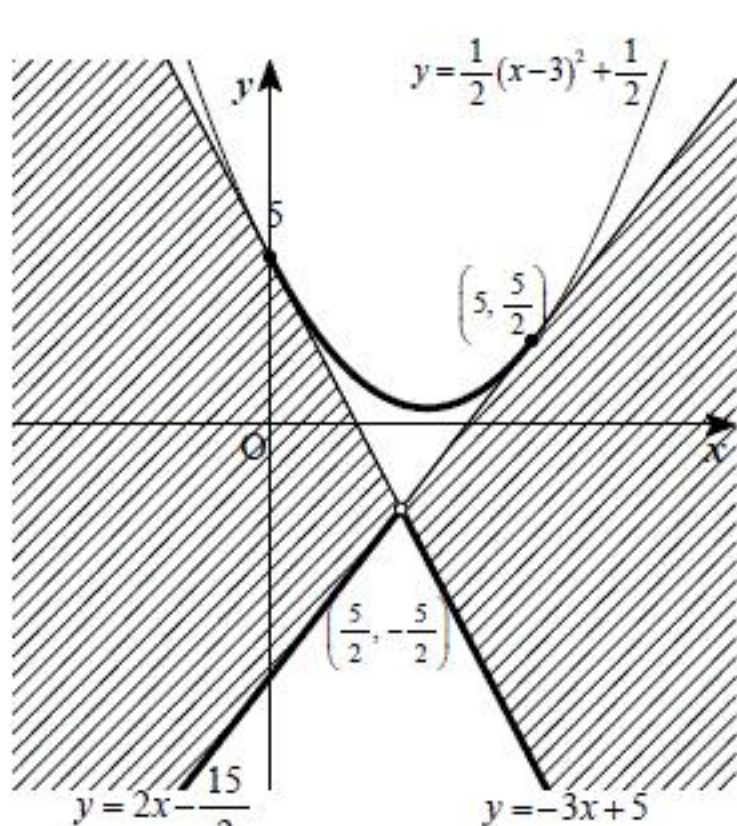
$$\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2} = 2x - \frac{15}{2}$$

を解くと、 $x = 5$ より、 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$ と $y = 2x - \frac{15}{2}$ は点 $(5, \frac{5}{2})$ で接する。また、方程式

$$-3x + 5 = 2x - \frac{15}{2}$$

を解くと、 $x = \frac{5}{2}$ より、 $y = -3x + 5$ と $y = 2x - \frac{15}{2}$ は、点 $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ で交わる。

したがって、求める領域は下図の斜線部ようになる。境界は、太線部のみ含む。



(答) 前図