

【Ⅰ】

【解答】

- (1) ア $\frac{\pi}{3}$
- イ $\frac{3}{4}\pi$
- (2) ウ $\frac{\pi}{2}$
- エ π
- (3) オ 8
- カ -16
- キ -1
- (4) ク 6
- ケ 6
- コ 0

注：アとイは順不同。

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cos 2\alpha + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} \cos \alpha + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + (2 - \sqrt{2}) \cos \alpha + \sqrt{2} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha + (2 - \sqrt{2}) \cos \alpha - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \cos \alpha - 1)(\sqrt{2} \cos \alpha + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos \alpha = \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore & \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < \alpha < \pi) \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} & \sin \beta - \sqrt{3} \cos \beta > 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \left(\sin \beta \cdot \frac{1}{2} - \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) > 1 \\ \Leftrightarrow & \sin \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < \beta < \pi$ より、 $-\frac{\pi}{3} < \beta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6} < \beta - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi \\ \therefore & \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \end{aligned}$$

である。

(3)

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が負であり、この放物線と x 軸で囲まれる図形が存在することから、 $a > 0$ である。放物線の頂点は $(1, -9)$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= a(x-1)^2 - 9 \\ &= ax^2 - 2ax + a - 9 \end{aligned}$$

とおける。したがって、

$$b = -2a, c = a - 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。この放物線と x 軸の交点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a - 3\sqrt{a}}{a}, \beta = \frac{a + 3\sqrt{a}}{a} \\ \therefore \beta - \alpha &= \frac{6}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

であるから、この放物線と x 軸で囲まれる図形の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{ -(ax^2 + bx + c) \} dx &= -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -a \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{a}{6} \left(\frac{6}{\sqrt{a}} \right)^3 \\ &= \frac{36}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{36}{\sqrt{a}} &= 9\sqrt{2} \\ \therefore a &= 8 \end{aligned}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ より、 $b = -16, c = -1$ である。

(4)

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \int_{-1}^1 f(t) dt = b, \int_{-1}^0 f(t) dt = c$$

とおく。このとき、

$$b = a + c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \int_0^1 f(t) dt + x \int_{-1}^1 f(t) dt + 1 + \int_{-1}^0 f(t) dt \\ &= ax^2 + bx + c + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (at^2 + bt + c + 1) dt \\ &= \left[\frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 + (c+1)t \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + 1 \\ \therefore 4a - 3b - 6c &= 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} c &= \int_{-1}^0 f(t) dt \\ &= \left[\frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 + (c+1)t \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c + 1 \\ \therefore 2a - 3b &= -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、 $(a, b, c) = (6, 6, 0)$ であるから、

$$\int_0^1 f(t) dt = 6, \int_{-1}^1 f(t) dt = 6, \int_{-1}^0 f(t) dt = 0$$

である。

【Ⅱ】

任意の事象 A に対して、それが起こる確率を $P(A)$ とおく。

(1)

サイコロの目が 2 の倍数、つまり、2, 4, 6 になる事象 A_1 に対し、

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

で、サイコロの目が 3 の倍数、つまり、3, 6 になる事象 A_2 に対し、

$$P(A_2) = \frac{1}{3}$$

が、それぞれが起こる確率である。

(答) サイコロの出た目が 2 の倍数である確率： $\frac{1}{2}$

サイコロの出た目が 3 の倍数である確率： $\frac{1}{3}$

(2)

2 つのサイコロの目の積が 2 の倍数及び 3 の倍数になる事象をそれぞれ A_3, A_4 とする。

$\overline{A_3}$ 、つまり、出る目の積が 2 の倍数にならないのは、出る目が 2 個とも 2 の倍数でない、すなわち、1, 3, 5 のいずれかとなる事象であるから、

$$\begin{aligned} 1 - P(A_3) &= P(\overline{A_3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow P(A_3) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。 $\overline{A_4}$ は同様に、2 個の出る目が 1, 2, 4, 5 のいずれかとなる事象であるから、

$$\begin{aligned} 1 - P(A_4) &= P(\overline{A_4}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow P(A_4) &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) サイコロの出た目の積が 2 の倍数になる確率： $\frac{3}{4}$

サイコロの出た目の積が 3 の倍数になる確率： $\frac{5}{9}$

(3)

$A_3 \cap A_4$ = 「目の積が 6 となる事象」

$\overline{A_3 \cup A_4}$ = 「目の積が 2 の倍数にも 3 の倍数にもならない事象」
= 「2 個の目が 1, 5 のいずれかとなる事象」

であるから、

$$P(\overline{A_3 \cup A_4}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} P(A_3 \cup A_4) &= P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\ \Leftrightarrow P(A_3 \cap A_4) &= P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 \cup A_4) \\ &= P(A_3) + P(A_4) - \left(1 - P(\overline{A_3 \cup A_4})\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{5}{9} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

が求める確率である。

(答) $\frac{5}{12}$

(4)

3 個のサイコロの出る目の積が 2 の倍数、3 の倍数となる事象をそれぞれ A_5, A_6 とおくと、(2), (3)と同様に、

$$P(\overline{A_5}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, P(\overline{A_6}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, P(\overline{A_5 \cup A_6}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} P(A_5 \cap A_6) &= P(A_5) + P(A_6) - P(A_5 \cup A_6) \\ &= \left(1 - P(\overline{A_5})\right) + \left(1 - P(\overline{A_6})\right) - \left(1 - P(\overline{A_5 \cup A_6})\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \left(1 - \frac{8}{27}\right) - \left(1 - \frac{1}{27}\right) \\ &= \frac{133}{216} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{133}{216}$

〔Ⅲ〕

(1)

「点 P が円 O の外側にある」

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \angle APB < \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \angle APB > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} > 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$$

(2)

以下、5点 A, B, C, D, E が相異なることに注意して考える (いずれかが一致すると、点 P は円の内部、または周、直線 AB, l_a, l_b 上になってしまい、矛盾する)。

点 C は直線 AP 上にあるので、

$$\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AP} = -k \overrightarrow{a} \quad (k: \text{実数})$$

とおける。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} \\ &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{PB} \\ &= (1-k) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

である。点 C が円 O の周上にあるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \{(1-k) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-k) |\overrightarrow{a}|^2 - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 1 - \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= -k \overrightarrow{a} \\ &= \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} - 1 \right) \cdot \overrightarrow{a}, \\ \overrightarrow{BC} &= (1-k) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} - 1 \right) \cdot \overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

(3)

点 E は直線 BC 上にあるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= l \overrightarrow{CB} \\ &= -l \overrightarrow{BC} \quad (l: \text{実数}) \end{aligned}$$

とおける。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\ &= \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} - 1 \right) \cdot \overrightarrow{a} - l \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \right) \\ &= \left\{ \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} (1-l) - 1 \right\} \overrightarrow{a} + l \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

であり、点 D は円 O の周上にあるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} (1-l) - 1 \right) \overrightarrow{a} + l \overrightarrow{b} \right\} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2} (1-l) - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + l |\overrightarrow{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow l &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} |\overrightarrow{a}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because |\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 = 0 \\ \Rightarrow (\cos \angle APB)^2 = \left(\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|} \right)^2 = 1 \\ \Rightarrow \angle APB = 0, \pi \\ \text{より矛盾する。よって(分母)} \neq 0 \end{array} \right)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PE} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2} (1-l) \overrightarrow{a} + l \overrightarrow{b} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} |\overrightarrow{a}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PE} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} |\overrightarrow{a}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \overrightarrow{b}$$

(4)

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BP}$ より、直線 BC, AD の交点 E は $\triangle ABP$ の垂心である。つまり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PE} &\perp \overrightarrow{AB} \\ \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PE} &= 0 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$