

【1】

【解答】

$$\text{ア } 4 \qquad \text{イ } \frac{4(d-b)}{ad-bc}$$

$$\text{ウ } px+qy=4 \quad \text{エ } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\text{オ } \frac{t^2-1}{2} \qquad \text{カ } t^2+\sqrt{2}t+5$$

$$\text{キ } 9 \qquad \text{ク } \frac{9}{2}$$

$$\text{ケ } \frac{11}{12}\pi \qquad \text{コ } \frac{16}{81}\pi$$

【解答】

$$l:ax+by=4 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$m:cx+dy=4 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

である。直線 l, m の交点を a の値で場合分けをして求める。

$$\begin{aligned} [1] \quad & a=0 \text{ のとき,} \\ & ad-bc \neq 0 \text{ より,} \\ & b \neq 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y = \frac{4}{b} \qquad \cdots \textcircled{1}'$$

となる。 $\textcircled{1}'$ を $\textcircled{2}$ に代入して,

$$cx+d \cdot \frac{4}{b} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= -\frac{4\left(1-\frac{d}{b}\right)}{c} \\ &= \frac{4(b-d)}{bc} \end{aligned}$$

と求まる。

$$[2] \quad a \neq 0 \text{ のとき,}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x = \frac{4-by}{a} \qquad \cdots \textcircled{1}''$$

となる。 $\textcircled{1}''$ を $\textcircled{2}$ に代入して,

$$c \cdot \frac{4-by}{a} + dy = 4$$

$$\Leftrightarrow 4c-bcy+ady=4a$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)y=4(a-c)$$

$$\therefore y = \frac{4(a-c)}{ad-bc}$$

と求まる。これを $\textcircled{1}''$ に代入して,

$$\begin{aligned} x &= \frac{4-b \cdot \frac{4(a-c)}{ad-bc}}{a} \\ &= \frac{4\{(ad-bc)-(ab-bc)\}}{a(ad-bc)} \\ &= \frac{4(d-b)}{ad-bc} \end{aligned}$$

と求まる。

[1], [2] より, [2] で求めた x 座標は [1] のときも成り立つので, 直線 l, m の交点の x 座標は,

$$x = \frac{4(d-b)}{ad-bc}$$

である。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の交点が P であるから, P は $\textcircled{1}$ の直線上にあり, $\textcircled{2}$ の直線上にある。したがって, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ に $P(p, q)$ を代入して,

$$\begin{cases} ap+bq=4 \\ cp+dq=4 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって, 直線 AB の方程式は,

$$px+qy=4 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

である。

次に合成公式を用いると,

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

である。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より, t は

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, 最大値 } \sqrt{2}$$

$$\theta = \pi \text{ のとき, 最小値 } -1$$

をとる。よって, t の範囲は,

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

$t = \sin \theta + \cos \theta$ より,

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2-1}{2}$$

と表せる。したがって,

$$\begin{aligned} z &= 2 \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta + 6 \\ &= 2 \cdot \frac{t^2-1}{2} + \sqrt{2} t + 6 \\ &= t^2 + \sqrt{2} t + 5 \end{aligned}$$

と表せる。上式を平方完成すると,

$$z = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{9}{2}$$

であるから, $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ より, z は $t = \sqrt{2}$ で最大値 9 をとり, $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値 $\frac{9}{2}$ をと

る。最小となるときの θ の値は,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

と変形でき,

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$$

であるから,

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{6}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{11}{12}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

条件より, $P(p, q)$ は原点を中心とする半径 9 の円の円周上を動くから,

$$p^2+q^2=81 \qquad \cdots \textcircled{4}$$

である。点と直線の距離の公式より, $\textcircled{3}$ 式と原点の距離を d とすると,

$$\begin{aligned} d &= \frac{|4|}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ &= \frac{4}{9} \quad (\because \textcircled{4}) \end{aligned}$$

と求まる。したがって, このとき $\textcircled{3}$ 式は, 原点を中心とする半径 $\frac{4}{9}$ の円の外側を通る。した

がって, 直線 AB は任意の傾きをとることができるため直線 AB が通らない範囲の面積は,

$$\pi \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^2 = \frac{16}{81} \pi$$

と求まる。

※イは行列を用いて次のようにも解ける。

$$\begin{aligned} &\begin{cases} ax+by=4 \\ cx+dy=4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \therefore &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because ad-bc \neq 0) \\ &= \frac{4}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{ad-bc} \begin{pmatrix} d-b \\ a-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

〔Ⅱ〕

(1)

a	$2b$	c
3	— 2 —	1
4	— 2 —	1
5	↖ 2 —	1
	4 ↖	3
		2
		1
6	— 2 —	1
	4 ↖	3
		2
		1

$a > 2b > c$ となる場合は、上の表より、10通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

である。

(答) $\frac{5}{108}$

(2)

各々の辺が他の2辺の和よりも小さければ、三角形は作ることができるので、求める条件は、

$$\begin{cases} a+2b > c \\ 2b+c > a \\ c+a > 2b \end{cases}$$

である。

(答) $a+2b > c, 2b+c > a, c+a > 2b$

(3)

$$\begin{cases} a^2 + (2b)^2 = c^2 & \cdots \textcircled{1} \\ c^2 + (2b)^2 = a^2 & \cdots \textcircled{2} \\ a^2 + c^2 = (2b)^2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

上のいずれかが成り立つとき、 $a, 2b, c$ を3辺とする三角形は直角三角形となる。

[1] ①のとき、

$$(a, 2b, c) = (3, 4, 5)$$

となればよい。

[2] ②のとき、

$$(a, 2b, c) = (5, 4, 3)$$

となればよい。

[3] ③のとき、

このような $(a, 2b, c)$ は存在しない。

[1], [2], [3]より、直角三角形となる (a, b, c) の組み合わせは、

$$(a, b, c) = (3, 2, 5), (5, 2, 3)$$

の2通りである。

(答) 2通り

(4)

$b=2$ のとき、3辺は $a, c, 4$ である。(2)の条件より、

$$\begin{cases} a+c > 4 \Leftrightarrow a+c \geq 5 \\ a+4 > c \Leftrightarrow c-a \leq 3 \\ c+4 > a \Leftrightarrow a-c \leq 3 \end{cases}$$

であるから、上の条件が成り立つような、 (a, c) を求めればよい。

[1] $a < c$ のとき、

$$(a, c) = (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)$$

$$(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$$

の10通りである。

[2] $a = c$ のとき、

$$(a, c) = (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の4通りである。

[3] $a > c$ のとき、

対称性より10通りである。

[1], [2], [3]より、 $b=2$ のとき、三角形が作れる、 c の組は24通りある。

(答) 24通り

(5)

[1] $b=1$ のとき、

(2)より、三角形の作れる条件は、

$$\begin{cases} a+c > 2 \Leftrightarrow a+c \geq 3 \\ a+2 > c \Leftrightarrow c-a \leq 1 \\ c+2 > a \Leftrightarrow a-c \leq 1 \end{cases}$$

であるから、上の条件が成り立つような、 (a, c) を求めればよい。

[i] $a < c$ のとき、

$$(a, c) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$$

の5通りである。

[ii] $a = c$ のとき、

$$(a, c) = (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の5通りである。

[iii] $a > c$ のとき、

$a < c$ と同様に5通りある。

[i], [ii], [iii]より、条件を満たす (a, c) の組は15通りである。

[2] $b=3$ のとき、

(2)より、三角形の作れる条件は、

$$\begin{cases} a+c > 6 \Leftrightarrow a+c \geq 7 \\ a+6 > c \Leftrightarrow c-a \leq 5 \\ c+6 > a \Leftrightarrow a-c \leq 5 \end{cases}$$

であるから、上の条件が成り立つような、 (a, c) を求めればよい。

[i] $a < c$ のとき、

$$(a, c) = (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$

$$(4, 5), (4, 6), (5, 6), (1, 6)$$

の9通りである。

[ii] $a = c$ のとき、

$$(a, c) = (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の3通りである。

[iii] $a > c$ のとき、

$a < c$ と同様に9通りある。

[i], [ii], [iii]より、条件を満たす (a, c) の組は21通りである。

[3] $b=4$ のとき、

(2)より、三角形の作れる条件は、

$$\begin{cases} a+c > 8 \Leftrightarrow a+c \geq 9 \\ a+8 > c \Leftrightarrow c-a \leq 7 \\ c+8 > a \Leftrightarrow a-c \leq 7 \end{cases}$$

であるから、上の条件が成り立つような、 (a, c) を求めればよい。

[i] $a < c$ のとき、

$$(a, c) = (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$$

の4通りである。

[ii] $a = c$ のとき、

$$(a, c) = (5, 5), (6, 6)$$

の2通りである。

[iii] $a > c$ のとき、

$a < c$ と同様に4通りある。

[i], [ii], [iii]より、条件を満たす (a, c) の組は10通りである。

[4] $b=5$ のとき、

(2)より、三角形の作れる条件は、

$$\begin{cases} a+c > 10 \Leftrightarrow a+c \geq 11 \\ a+10 > c \Leftrightarrow c-a \leq 9 \\ c+10 > a \Leftrightarrow a-c \leq 9 \end{cases}$$

であるから、上の条件が成り立つような、 (a, c) は、

$$(a, c) = (5, 6), (6, 5), (6, 6)$$

の3通りである。

[5] $b=6$ のとき、

$a+c > 12$ を満たす a, c は存在しない。

[1]~[5]より、求める確率は、

$$\frac{15+24+21+10+3}{6^3} = \frac{73}{216}$$

である。

(答) $\frac{73}{216}$

〔Ⅲ〕

(1)

正弦定理より、

$$\frac{AB_1}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \{\pi - (\beta + \gamma)\}}$$

$$\therefore AB_1 = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

と求まる。したがって、

$$T_1 = \frac{1}{2} AB_1 \cdot B_1 C_1 \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad AB_1 = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}, T_1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

(2)

正弦定理より、

$$\frac{AC_1}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin (\beta + \gamma)}$$

$$\therefore AC_1 = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)}$$

であるから、

$$\frac{r_1}{2} (B_1 C_1 + AB_1 + AC_1) = T_1$$

より、

$$\frac{r_1}{2} a \left\{ 1 + \frac{\sin \gamma + \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} \right\} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

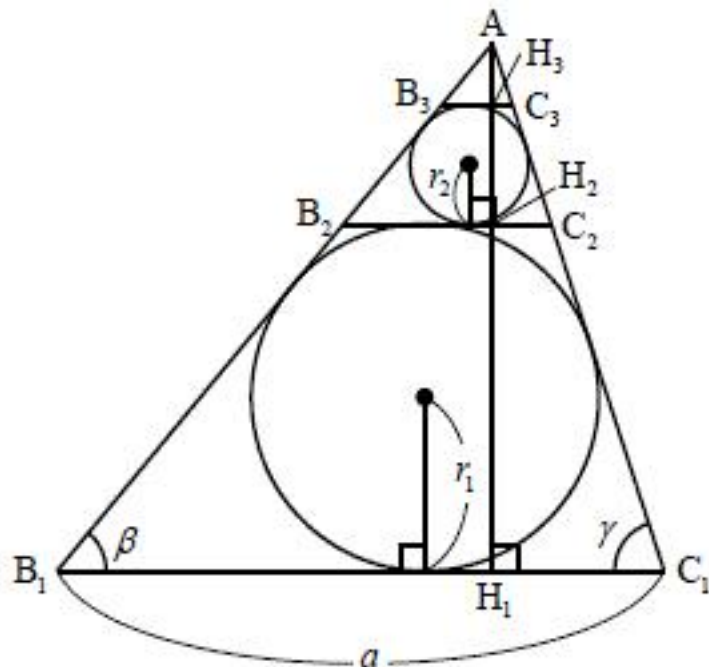
$$r_1 \frac{\sin (\beta + \gamma) + \sin \gamma + \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} = a \cdot \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

$$r_1 = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad r_1 = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

(3)



A から辺 B, C に垂線 AH_1 を引く。 AH_1 と直線 $B_n C_n$ の交点を H_n とおく。 $\triangle AB_1 C_1 \sim \triangle AB_2 C_2$ より、

$$B_1 C_1 : B_2 C_2 = AH_1 : AH_2$$

$$\Leftrightarrow a : B_2 C_2 = AB_1 \sin \beta : AB_1 \sin \beta - 2r_1$$

$$\therefore B_2 C_2 = a \frac{AB_1 \sin \beta - 2r_1}{AB_1 \sin \beta}$$

$$= a \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

と求まる。(1), (2) の議論を $\triangle AB_2 C_2$ について同様に行うと、

$$r_2 = \frac{B_2 C_2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)} r_1$$

$$\therefore \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

となる。以上より、同様の議論を繰り返すことにより、

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)} \quad \dots (\star)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}$$

(4)

($\star$) の右辺を α とおく。

$$\cos \beta = \frac{4}{5}, \cos \gamma = -\frac{3}{5}$$

のとき、 $0 < \beta < \pi, 0 < \gamma < \pi$ より、

$$\sin \beta = \frac{3}{5}, \sin \gamma = \frac{4}{5}$$

であるから、

$$\sin (\beta + \gamma) = \frac{7}{25}$$

となる。また、(1), (2), (3) より、

$$T_1 = \frac{6}{7} a^2, r_1 = \frac{2}{7} a, \alpha = \frac{2}{3}$$

であるから、

$$r_{n+1} = \alpha r_n$$

$$\Leftrightarrow r_n = \alpha^{n-1} r_1$$

より、

$$\therefore \frac{1}{T_1} \sum_{k=1}^n U_k = \frac{1}{T_1} \sum_{k=1}^n \pi r_k^2$$

$$= \frac{1}{T_1} \sum_{k=1}^n \pi (\alpha^{k-1} r_1)^2$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{T_1} \sum_{k=1}^n (\alpha^2)^{k-1}$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{T_1} \sum_{k=1}^n (\alpha^2)^{k-1}$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{T_1} \cdot \frac{1 - (\alpha^2)^n}{1 - \alpha^2}$$

$$= \frac{6}{35} \pi \left\{ 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right\}$$

と求まる。