

【Ⅰ】

【解答】

- (1) ア $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ イ $\frac{\alpha}{3}$
- ウ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ エ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- オ $\frac{1}{3}$
- (2) カ 1 キ $\frac{1}{2}$
- ク 2 ケ 1
- コ 1

【解説】

(1) 2 次方程式

$$3x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の 2 解が $\cos \theta, \sin \theta$ であるから、解と係数の関係により、

$$\cos \theta + \sin \theta = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}, \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{\alpha}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。②の両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 1 + 2\sin \theta \cos \theta &= \frac{9 + 4\sqrt{2}}{9} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{3}\alpha &= 1 + \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad (\because \textcircled{3}) \\ \therefore \alpha &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって①より、

$$\begin{aligned} 3x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + \frac{2\sqrt{2}}{3} &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}{6} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} \pm (2\sqrt{2} - 1)}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より、 $\sin \theta < \frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \theta = \frac{1}{3}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \log_2 x &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

より、 C_1 と x 軸の交点の座標は $(1, 0)$ である。また、

$$\begin{aligned} y &= \log_4 (0 + 2) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より、 C_2 と y 軸の交点の座標は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ である。次に、 C_1 と C_2 の交点の座標を求める。連立

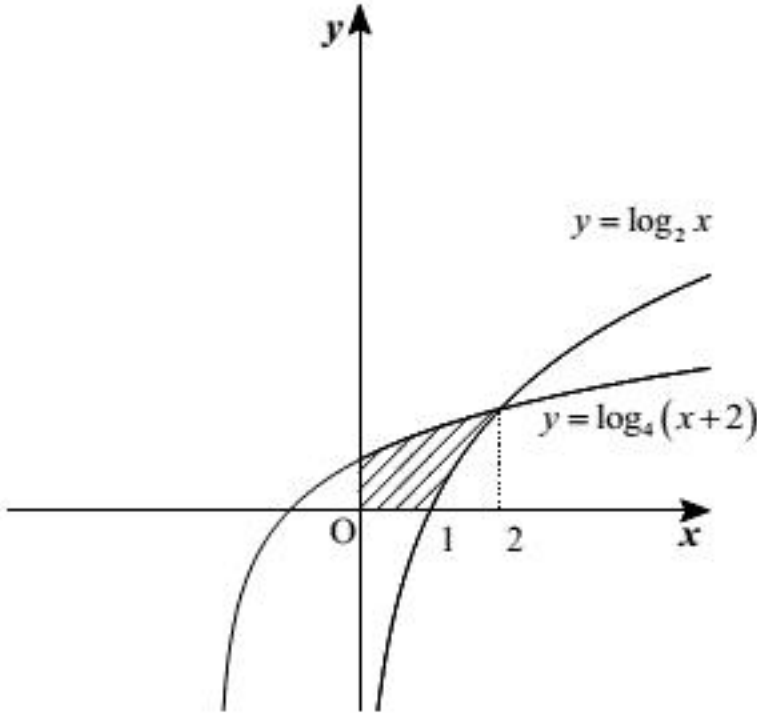
方程式

$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = \log_4 (x + 2) \end{cases}$$

を解けば良い。真数条件により、 $x > 0$ であることに注意する。

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \log_4 (x + 2) \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= \frac{1}{2} \log_2 (x + 2) \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 &= \log_2 (x + 2) \\ \Leftrightarrow x^2 &= x + 2 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となり、交点の座標は $(2, 1)$ である。



上図より、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \log_4 (x + 2) dx - \int_1^2 \log_2 x dx \\ &= \frac{1}{\log 4} \left[(x + 2) \log (x + 2) - x \right]_0^2 - \frac{1}{\log 2} [x \log x - x]_1^2 \\ &= \frac{1}{2 \log 2} (6 \log 2 - 2) - \frac{1}{\log 2} (2 \log 2 - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

より、

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{50}{3} \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{455}{9} \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{50}{3} \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{455}{9} \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より、各一般項は、

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, r_n = 0, s_n = 3^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

と推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき、

明らかに成立する。

[2] $n=k$ のとき、

成立すると仮定する。すなわち、

$$A^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & q_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

であると仮定する。このとき、

$$A^{k+1} = A \cdot A^k$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & q_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} & \frac{1}{3}q_k + 5 \cdot 3^k \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

であり、

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} p_{k+1} & q_{k+1} \\ r_{k+1} & s_{k+1} \end{pmatrix}$$

より、 $n=k+1$ においても成立する。

以上[1], [2]より、 $\textcircled{1}$ が成立する。

$$(\text{答}) \quad p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, r_n = 0, s_n = 3^n$$

(3)

(2)[2]と同じ計算により、すべての自然数 n に対して、

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + 5 \cdot 3^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が分かる。

$$(\text{答}) \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + 5 \cdot 3^n$$

(4)

$\textcircled{2} \times 3^{n+1}$ より、

$$3^{n+1}q_{n+1} = 3^nq_n + 5 \cdot 3^{2n+1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $t_n = 3^nq_n$ とおくと、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow t_{n+1} = t_n + 15 \cdot 9^n$$
$$\Leftrightarrow t_{n+1} - t_n = 15 \cdot 9^n$$

となる。よって、 $n \geq 2$ となる自然数 n について、

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) + t_1$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} 15 \cdot 9^k + 3 \cdot 5 \quad (\because t_1 = 3q_1 = 3 \cdot 5)$$
$$= 15 \cdot 9 \frac{9^{n-1} - 1}{9 - 1} + 3 \cdot 5$$
$$= \frac{15}{8} (9^n - 1)$$

である。上式は $n=1$ でも成立するから、すべての自然数 n に対し、

$$t_n = 3^nq_n$$
$$\Leftrightarrow q_n = \frac{1}{3^n}t_n = \frac{15}{8} \left\{ 3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

である。

$$(\text{答}) \quad q_n = \frac{15}{8} \left\{ 3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

(5)

$$\begin{cases} a_n = ap_n + bq_n = a \left(\frac{1}{3}\right)^n + b \cdot \frac{15}{8} \left\{ 3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ b_n = ar_n + bs_n = b \cdot 3^n \end{cases}$$

より、 $b > 0$ から $b_n > 0$ であり、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \frac{15}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \right\}$$
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{15}{8}$$

となる。よって、 $b_n > 0$ に注意して、

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{b_n}}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{15}{17},$$
$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{8}{17}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad u = \frac{15}{17}, v = \frac{8}{17}$$

【Ⅲ】

(1)

$$\begin{cases} y = e^x - e^a + 1 & \cdots \textcircled{1} \\ x = a - \log y & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とする。②式において真数条件により、 $y > 0$ である。この条件のもとで①と②の共有点を求める。②を①に代入して、

$$\begin{aligned} y &= e^{a - \log y} - e^a + 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{e^a}{y} - e^a + 1 \\ \Leftrightarrow y^2 + (e^a - 1)y - e^a &= 0 \\ \Leftrightarrow (y - 1)(y + e^a) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。 $e^a > 0, y > 0$ であるから、 $y = 1$ と求まる。これを②に代入して、 $x = a$ と求まる。以上より、共有点の座標は、 $(a, 1)$ である。

(答) $(a, 1)$

(2)

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow e^x = e^{a - \log y} \quad (\because \text{関数 } f(x) = e^x \text{ は一対一対応})$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{e^a}{y} \quad (y > 0)$$

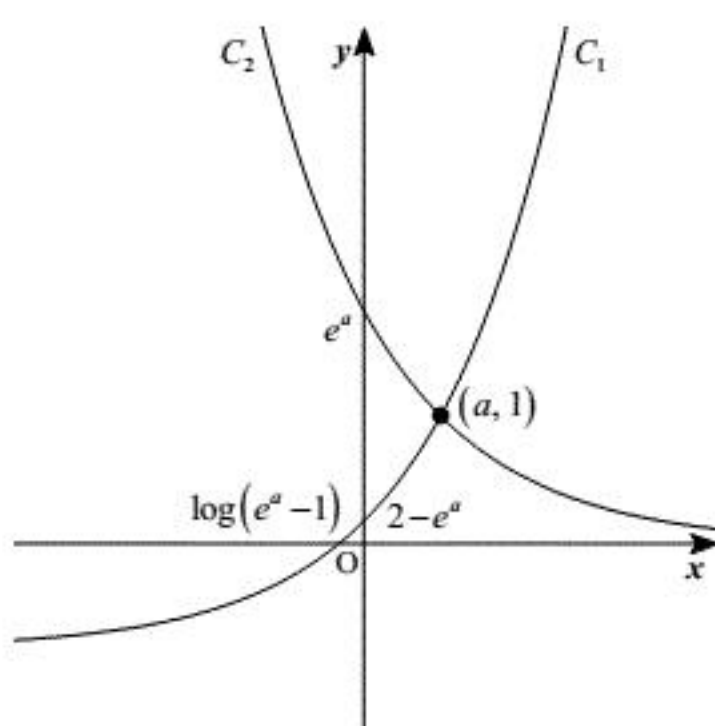
$$\Leftrightarrow y = e^{a - x} \quad (\because y > 0 \text{ は常に成立})$$

よって、 $C_1: y = e^x - e^a + 1$ は、 $y = e^x$ のグラフを y 軸方向に $-e^a + 1 (< 0)$ だけ平行移動したグラフであり、 $C_2: y = e^{a - x}$ は $y = e^{-x}$ のグラフを x 軸方向に $a (> 0)$ 平行移動したグラフで y 切片は e^a となる。

[1] $0 < a < \log 2$ のとき、

$$\begin{aligned} 2 - e^a &> 0, \\ \log(e^a - 1) &< 0 \end{aligned}$$

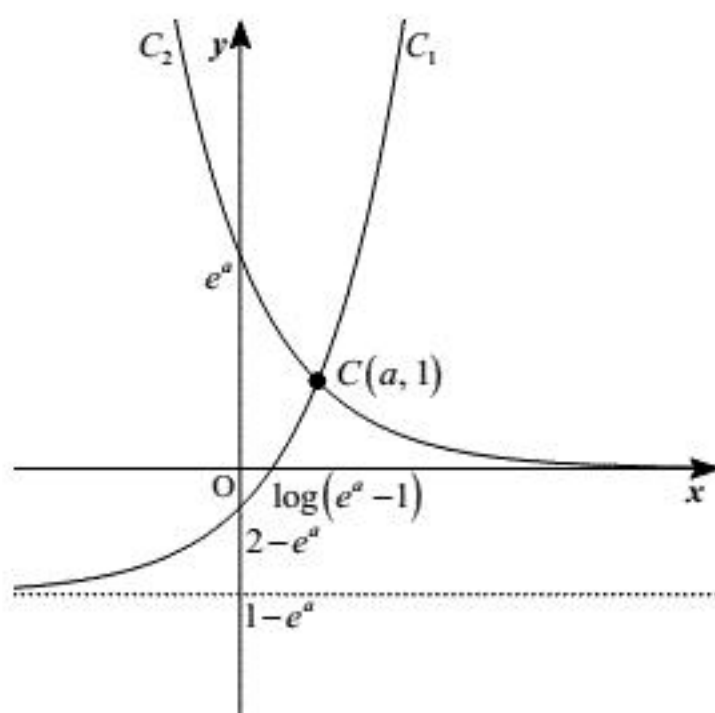
より、グラフは下図の通り。



[2] $\log 2 \leq a$ のとき、

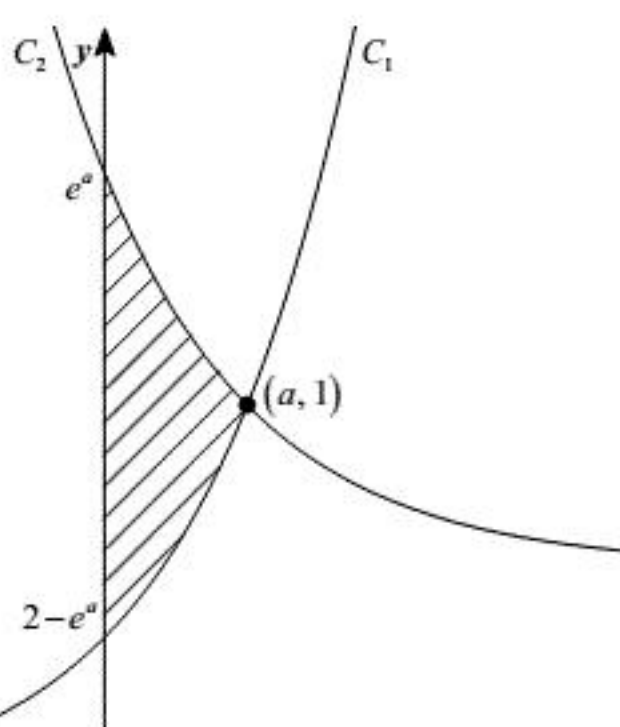
$$\begin{aligned} 2 - e^a &\leq 0, \\ \log(e^a - 1) &\geq 0 \end{aligned}$$

より、グラフは下図の通り。



(答) 前図

(3)



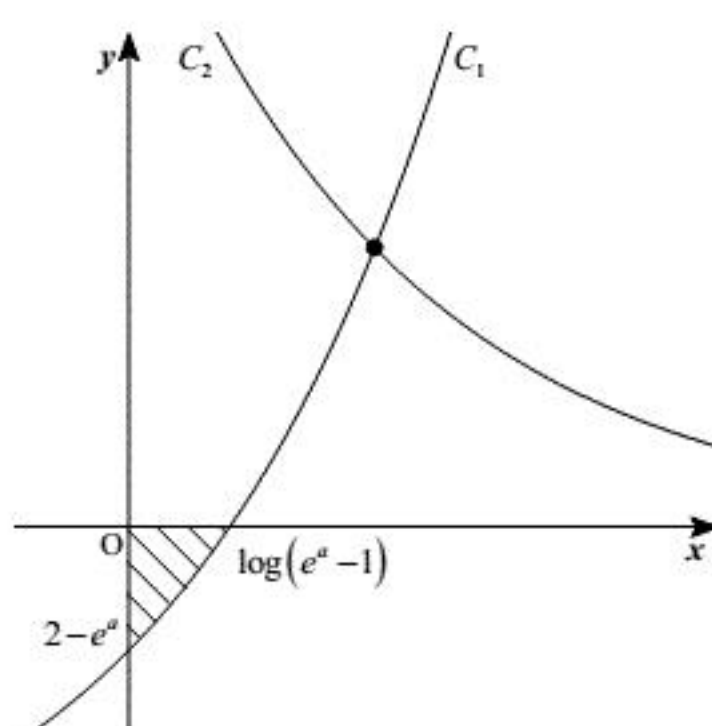
図形 D は上図の斜線部なので、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{e^{a-x} - (e^x - e^a + 1)\} dx \\ &= \left[-e^{a-x} - e^x + x(e^a - 1) \right]_0^a \\ &= a(e^a - 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $S = a(e^a - 1)$

(4)



(2)より、 $a \geq \log 2$ の場合に限る。図形 D と領域 $y \leq 0$ の共通部は上図の斜線部である。この面積 S' は

$$\begin{aligned} S' &= \int_0^{\log(e^a - 1)} \{-(e^x - e^a + 1)\} dx \\ &= \left[-e^x + x(e^a - 1) \right]_0^{\log(e^a - 1)} \\ &= -(e^a - 1) + 1 + (e^a - 1)\log(e^a - 1) \end{aligned}$$

である。よって、

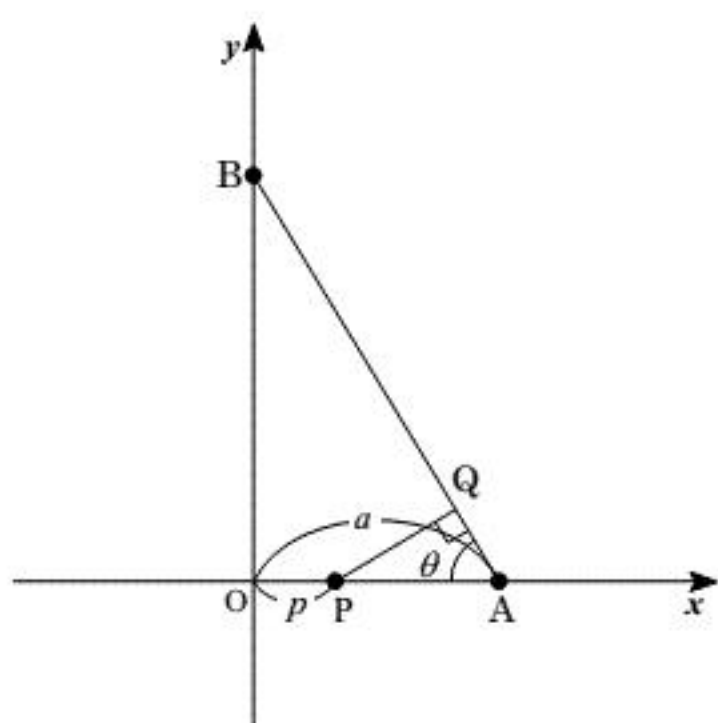
$$\begin{aligned} S' &= 1 \\ \Leftrightarrow -(e^a - 1) + 1 + (e^a - 1)\log(e^a - 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow (e^a - 1)\{\log(e^a - 1) - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log(e^a - 1) - 1 = 0 \quad (\because a > 0 \Rightarrow e^a - 1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow e^a - 1 &= e \\ \Leftrightarrow e^a &= 1 + e \\ \Leftrightarrow a &= \log(1 + e) \end{aligned}$$

これは $1 + e \geq 2$ から $a \geq \log 2$ を満たす。

(答) $a = \log(1 + e)$

[IV]

(1)



$\angle OAB = \theta$ とおく。 $\angle AOB = \angle AQP = \frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned} PQ &= PA \sin \theta \\ &= PA \cdot \frac{BO}{AB} \\ &= \frac{a-p}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad PQ = \frac{a-p}{\sqrt{a^2+1}}$$

(2)

題意の回転体は、 $PQ \perp AB$ より、点 B を頂点とし、点 Q を中心として直線 AB と垂直な半径 PQ の円 C を底面にもつ円錐である。円 C の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= PQ^2 \cdot \pi \\ &= \frac{(a-p)^2}{a^2+1} \pi \end{aligned}$$

である。また、(1)より、

$$\begin{aligned} BQ &= AB - AQ \\ &= AB - AP \cos \theta \\ &= \frac{ap+1}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot BQ \\ &= \frac{\pi(a-p)^2(ap+1)}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi(a-p)^2(ap+1)}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(3)

V の最大値を M とする。

$$V = \frac{\pi}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} (a-p)^2 (ap+1)$$

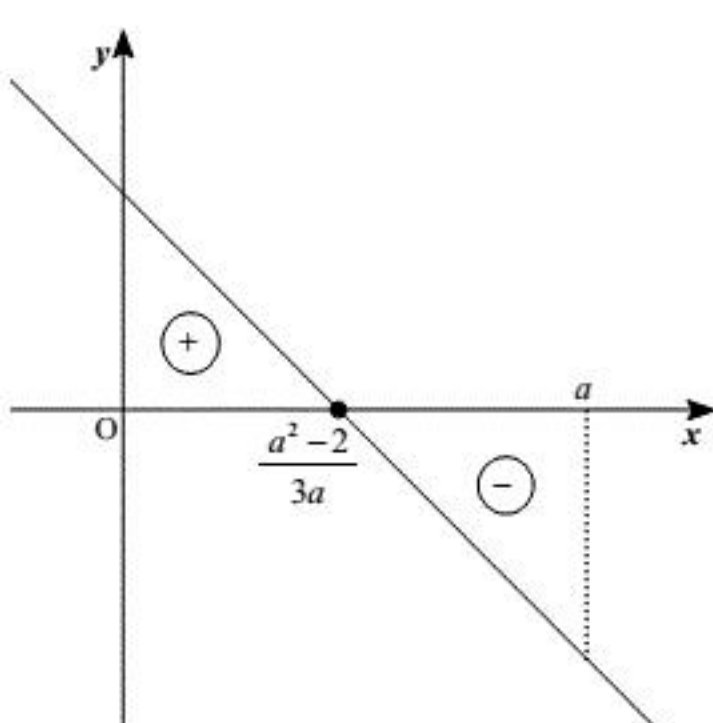
より、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dp} &= \frac{\pi}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} \{-2(a-p)(ap+1) + a(a-p)^2\} \\ &= \frac{\pi}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} (a-p)(a^2-2-3ap) \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq p < a$ より、 $a-p > 0$ であるから、 $\frac{dV}{dp}$ の正負は、 $a^2-2-3ap (= f(p))$ とおく)の

正負と一致する。 $f(a) = -2(a^2+1) < 0$ であるので、

[1] $f(0) \geq 0 \Leftrightarrow a^2-2 \geq 0 \Rightarrow a \geq \sqrt{2}$ ($\because a > 0$) のとき、
 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。

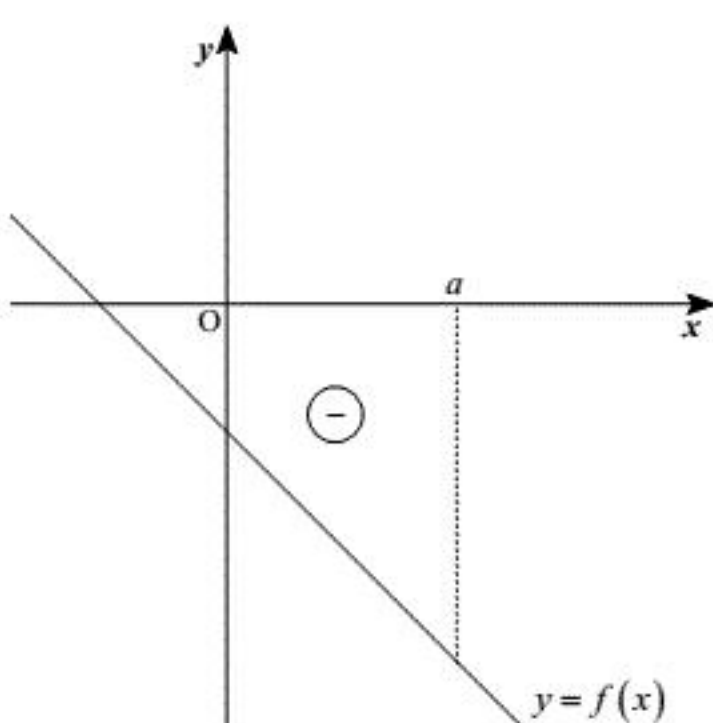


これより V は $p = \frac{a^2-2}{3a}$ で最大値をとり、

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi \left(a - \frac{a^2-2}{3a} \right)^2 \left(a \cdot \frac{a^2-2}{3a} + 1 \right)}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4\pi(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{81a^2} \end{aligned}$$

である。

[2] $f(0) < 0 \Leftrightarrow a^2-2 < 0 \Rightarrow 0 < a < \sqrt{2}$ ($\because a > 0$) のとき、
 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



よって、増減表は下図の通り。

p	0	...	a
$\frac{dV}{dp}$		-	/
V		↘	/

これより V は $p = 0$ で最大値をとり、

$$M = \frac{\pi a^2}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

である。

以上[1], [2]より、

$$M = \begin{cases} \frac{4\pi(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{81a^2} & (\sqrt{2} \leq a \text{ のとき}) \\ \frac{\pi a^2}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}} & (0 \leq a < \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a \geq \sqrt{2} \text{ のとき } \frac{4\pi(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{81a^2}, \quad 0 \leq a < \sqrt{2} \text{ のとき } \frac{\pi a^2}{3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$