

〔 I 〕

〔解答〕

- (1) ア 3 イ 4
 ウ $8 \cdot 3^{n-1} - 2$ エ $4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$
- (2) オ $\frac{2}{3}\pi$ カ $-\frac{1}{4}$
 キ $\frac{\pi}{3}$ ク $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 ケ $1 + \cos \theta$ コ 2

〔解説〕

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 4n$ (・・・①)より、
 $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(n+1)$ ・・・②
 が成り立つので、②-①より、
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 4$
 となる。したがって、上式に $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$, $b_n = a_{n+1} - a_n$ を代入して、
 $b_{n+1} = 3b_n + 4$
 が成り立つ。
 $a_2 = 3a_1 + 4 \cdot 1 = 7$, $b_2 = a_2 - a_1 = 6$
 であるから、数列 b_n の一般項は、
 $b_{n+1} = 3b_n + 4$
 $\Leftrightarrow b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$
 $\Leftrightarrow b_n + 2 = 3^{n-1}(b_1 + 2)$
 $\therefore b_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$
 と求まる。したがって、 $n \geq 2$ のとき、数列 a_n の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 8 \cdot 3^{k-1} - 2 \\ &= 1 + \frac{8(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - 2(n-1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

- (2)
$$\begin{cases} x = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

x を θ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin \theta \cos \theta + (1 + \cos \theta) \cdot (-\sin \theta) \\ &= -\sin \theta (1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= 0 \text{ or } \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 0, \frac{2}{3}\pi, \pi \end{aligned}$$

と計算できるので、 $0 \leq \theta \leq \pi$ における x の増減表は下記の通りである。

θ	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	0	+	0
x	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

したがって、 x は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。同様に、 y を θ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -\sin \theta \cdot \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ &= -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta \\ &= 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}, -1 \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3}, \pi \end{aligned}$$

と計算できるので、 $0 \leq \theta \leq \pi$ における y の増減表は下記の通りである。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

したがって、 y は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。また、曲線 C と原点の距離 r は、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 \cos^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{(1 + \cos \theta)^2} \\ &= 1 + \cos \theta \quad (\because 1 + \cos \theta \geq 0) \end{aligned}$$

と表される。したがって、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、 r は $\theta = 0$ のとき、最大値 2 をとる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{c} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a}$$

(2)

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$

以上から,

$$\triangle PQR \sim \triangle CAB$$

であり, 相似比が

$$1:3$$

であるから, 面積比は

$$1:3^2 = 1:9$$

したがって, $\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の

$$\frac{1}{9} \text{ 倍}$$

である。

(3)

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

また, $\triangle PQR$ の重心を S' とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS'} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) \right\} \\ &= \frac{2}{9}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OS} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\overrightarrow{S'S} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OS'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OS}$$

なので, O, S, S' が一直線上にある。これより, 四面体 $PQRS$ の S に対する高さを h とすると, 四面体 $OABC$ の O に対する高さは, $3h$ である。よって,

$$\begin{aligned} \frac{V'}{V} &= \frac{\text{四面体 PQRS}}{\text{四面体 OABC}} = \frac{\frac{1}{3}h \cdot S}{\frac{1}{3} \cdot 3h \cdot 9S} \\ &= \frac{1}{27} \text{ [倍]} \end{aligned}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = \log(1+x^2)$$

であるから、両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

さらに微分すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{(1+x^2)^2} \{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x\} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

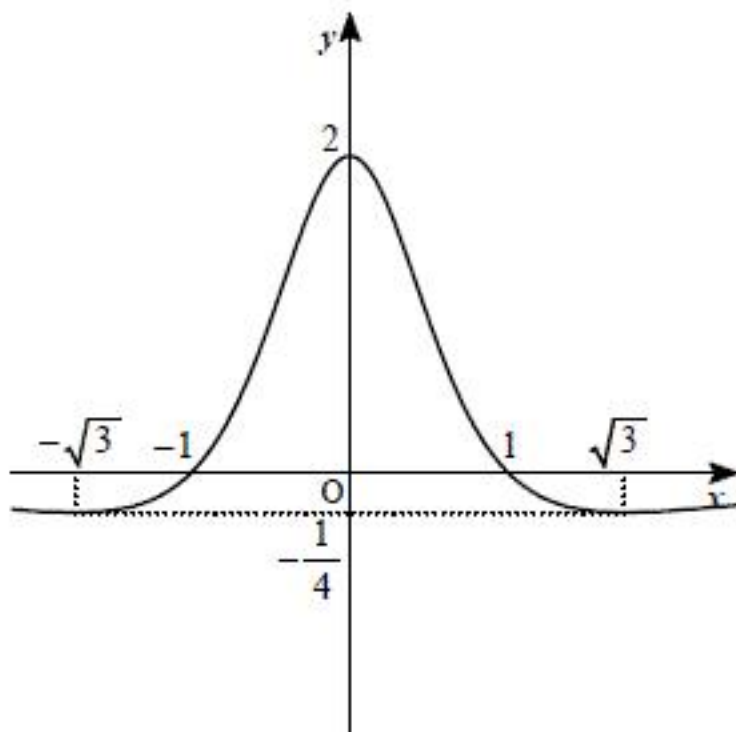
よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(1+x^2)^4} \{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x\} \\ &= \frac{-4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \{(1+x^2) + 2(1-x^2)\} \\ &= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$f(x)$ は偶関数であるから、 $x \geq 0$ における増減は次の通り。

x	0	...	$\sqrt{3}$	...	$(+\infty)$
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	(0)

よって、グラフは、



(2)

$f(x)=0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} &= 0 \\ \therefore (1+x)(1-x) &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $x=\pm 1$ であるから

$$\underline{a=-1, b=1}$$

(3)

$f(x)$ は偶関数なので、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 2 \left[\frac{2x}{1+x^2} \right]_0^1 \\ &= 2(1-0) \\ &= \underline{2} \end{aligned}$$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned} g(x) &= x \int_0^x f(t) dt \\ &= x \left[\frac{2t}{1+t^2} \right]_0^x \\ &= \frac{2x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

$h(x) = \frac{2}{1+x^2}$ のとき、 $g(x) < h(x)$ とすると、

$$\frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} < 0$$

$1+x^2 > 0$ より、

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1) &< 0 \\ \therefore -1 < x < 1 \end{aligned}$$

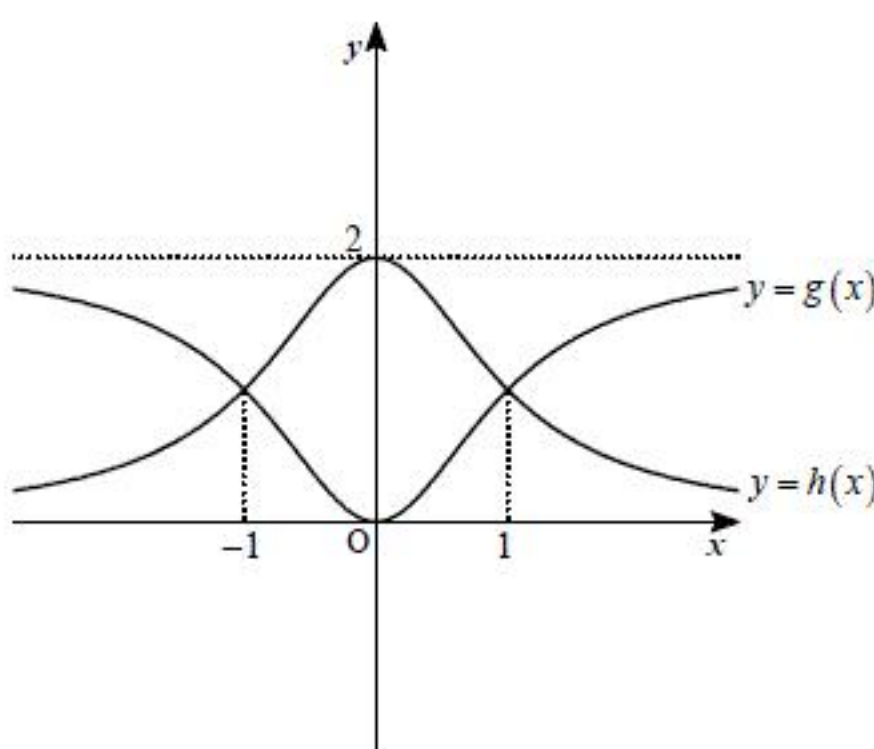
$$h'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

より、 $h(x)$ は、 $x=0$ で極値をとる。

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4x(1+x^2) - 2x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ は、 $x=0$ で極値をとる。また、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 2$ より、

$y=h(x)$ 、 $y=g(x)$ の概形は下図のようになる。



よって、求める面積 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2x^2}{1+x^2} \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left(\frac{-(1+x^2)+2}{1+x^2} \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx \\ &= -4 + 8 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

ここで、 $x=\tan \theta$ とおくと、

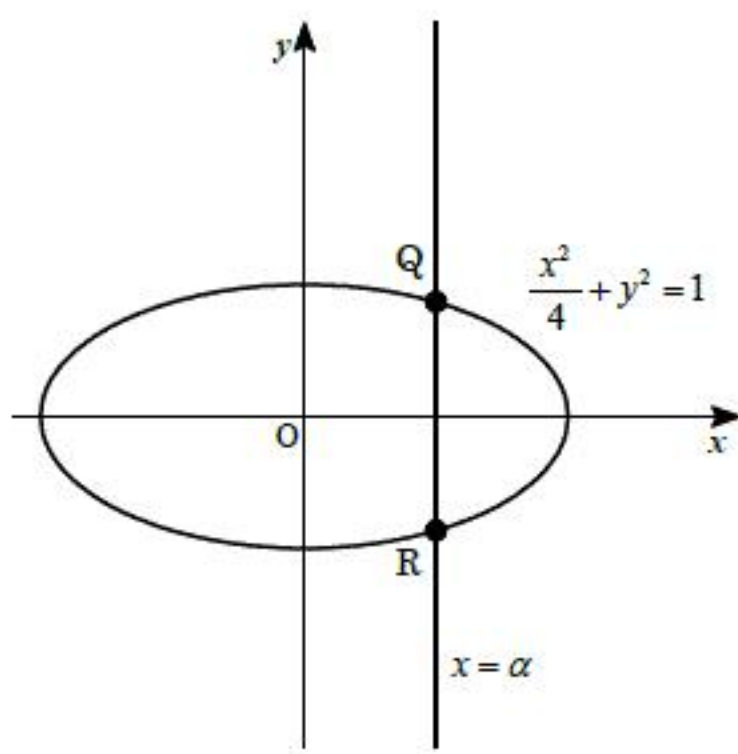
$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

より、

$$\begin{aligned} S_2 &= -4 + 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= -4 + 8 \times \frac{\pi}{4} \\ &= \underline{2\pi-4} \end{aligned}$$

〔IV〕



(1)

直線 ℓ と楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{4} + y^2 &= 1 \\ \therefore y &= \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \end{aligned}$$

よって

$$Q\left(\alpha, \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}\right), R\left(\alpha, -\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}\right)$$

(2)

円 C の中心は $(\alpha, 0)$ ，半径は $\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}$ であるから

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

(3)

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

を α について整理すると

$$5\alpha^2 - 8x\alpha + 4x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ が $-2 < \alpha < 2$ の実数解をもつような (x, y) の条件を求めればよいことがわかる。 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (4x)^2 - 5(4x^2 + 4y^2 - 4) \\ &= -4x^2 - 20y^2 + 20 \\ &= -4(x^2 + 5y^2 - 5) \end{aligned}$$

である。また、 $f(\alpha) = 5\alpha^2 - 8x\alpha + 4x^2 + 4y^2 - 4$ とおくと、 $f(\alpha)$ の軸は

$$\alpha = \frac{4}{5}x \quad \dots \textcircled{2}$$

である。さらに

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4x^2 + 16x + 4y^2 + 16 \\ &= 4(x+2)^2 + 4y^2 \\ &\geq 0 \\ f(2) &= 4x^2 - 16x + 4y^2 + 16 \\ &= 4(x-2)^2 + 4y^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ が $-2 < \alpha < 2$ の実数解をもつような (x, y) の条件を場合分けをして求める。

[1] $f(-2) > 0, f(2) > 0$ のとき

このとき $\textcircled{1}$ が $-2 < \alpha < 2$ に実数解をもつ条件は、

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{4} \geq 0 \\ \text{軸: } -2 < \frac{4}{5}x < 2 \\ f(-2) > 0, f(2) > 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5y^2 \leq 5 \\ -\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2} \\ (x, y) \neq (-2, 0), (2, 0) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + y^2 \leq 1 \\ -\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2} \\ (x, y) \neq (-2, 0), (2, 0) \end{array} \right. \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。③を満たす x の範囲は

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

であり、④を満たす。したがって、このとき $\textcircled{1}$ が $-2 < \alpha < 2$ に実数解をもつ条件は

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + y^2 \leq 1 \quad \text{ただし } (x, y) \neq (-2, 0), (2, 0)$$

である。

[2] $f(-2) = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4x^2 + 16x + 4y^2 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow &4(x+2)^2 + 4y^2 = 0 \\ \therefore &(x, y) = (-2, 0) \end{aligned}$$

と求まるので、これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$\begin{aligned} 5\alpha^2 + 16\alpha + 12 &= 0 \\ \therefore \alpha &= -2, -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、このとき $\textcircled{1}$ は $-2 < \alpha < 2$ の実数解をもつ。

[3] $f(2) = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(2) &= 4x^2 - 16x + 4y^2 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow &4(x-2)^2 + 4y^2 = 0 \\ \therefore &(x, y) = (2, 0) \end{aligned}$$

と求まるので、これを $\textcircled{1}$ に代入すると

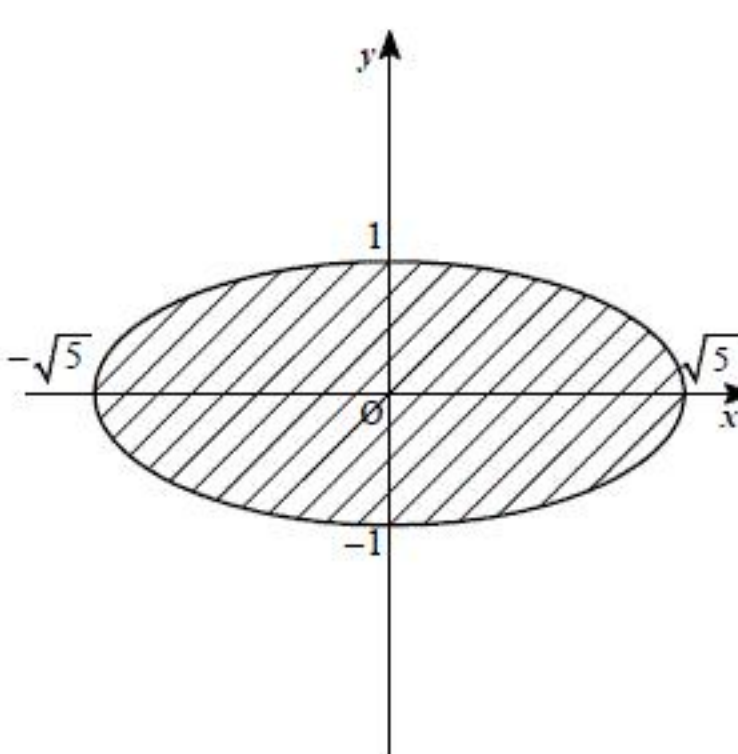
$$\begin{aligned} 5\alpha^2 - 16\alpha + 12 &= 0 \\ \therefore \alpha &= 2, \frac{6}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、このとき $\textcircled{1}$ は $-2 < \alpha < 2$ の実数解をもつ。

[1], [2], [3] より、 $\textcircled{1}$ が $-2 < \alpha < 2$ の実数解をもつための (x, y) の条件は

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + y^2 \leq 1$$

である。これが範囲 D を表す不等式であり、図示すると下図のようになる。



(4)

$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + y^2 \leq 1$ において x 座標が最大となるのは

$$\text{点}(\sqrt{5}, 0)$$

(2) で求めた円 C の方程式より、

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} - \alpha)^2 &= 1 - \frac{\alpha^2}{4} \\ \therefore \alpha &= \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって

$$\left(x - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$$