

【 I 】

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} \text{ア} & 6 & \text{イ} & 6 & \text{ウ} & 6^n \\ & \frac{3 \cdot 6^n + 2}{5} & \text{オ} & \frac{2 \cdot 6^n + 3}{5} & & \\ (2) & \text{カ} & \frac{1}{21} & \text{キ} & \frac{11}{28} & \text{ク} & 15 \\ & \text{ケ} & 555 & \text{コ} & \frac{5}{9} & & \end{array}$$

【解説】

(1)

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ にケーリー・ハミルトンの定理を適用すると、

$$A^2 - 7A + 6E = O \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことがわかる。これは

$$A^2 - A = 6(A - E)$$

のように変形できるので $c_1 = 6$ である。これより、 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} A^{n+1} - A^n &= A^{n-1}(A^2 - A) \\ &= A^{n-1} \cdot 6(A - E) \\ &= 6(A^n - A^{n-1}) \end{aligned}$$

という関係式が得られるから、繰り返し用いて

$$A^{n+1} - A^n = 6^n(A - E) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、 $c_n = 6^n$ と求まる。

同様にして、 $\textcircled{1}$ は

$$A^2 - 6A = A - 6E$$

と変形されることから、

$$A^{n+1} - 6A^n = A - 6E \quad \cdots \textcircled{3}$$

も成り立つ。

$\textcircled{2} - \textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} 5A^n &= 6^n(A - E) - (A - 6E) \\ A^n &= \frac{1}{5} \{ 6^n(A - E) - (A - 6E) \} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ 6^n \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \cdot 6^n + 2 & 2 \cdot 6^n - 2 \\ 3 \cdot 6^n - 3 & 2 \cdot 6^n + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる（これは $n = 1$ のときも成り立つ）。したがって、

$$\begin{aligned} A^n \text{ の } (1, 1) \text{ 成分は } & \frac{3 \cdot 6^n + 2}{5} \\ A^n \text{ の } (2, 2) \text{ 成分は } & \frac{2 \cdot 6^n + 3}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)

番号札の取り出し方は全部で、 ${}_9P_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7$ 通りである。

3 以上 6 以下の数字は 4 つあるから、取り出した番号がすべて 3 以上 6 以下となるような取り出し方は、 ${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ 通りである。よって、これが実現する確率は

$$\frac{{}_4P_3}{{}_9P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

である。

次に、「2 以下の札がある」「7 以上の札がある」という事象をそれぞれ A, B とすると、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{ P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \text{番号がすべて 3 以上となる確率} \\ &= \frac{{}_7P_3}{{}_9P_3} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= \text{番号がすべて 6 以下となる確率} \\ &= \frac{{}_6P_3}{{}_9P_3} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \text{番号がすべて 3 以上 6 以下となる確率} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

であるから、取り出した番号の中に 2 以下の番号と 7 以上の番号が両方ある確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - \{ P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{21} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{11}{28} \end{aligned}$$

となる。

取り出した 3 枚の番号の和の期待値を E_1 とすると、 E_1 は

$$E_1 = \frac{1}{{}_9P_3} \{ (1+2+3) + (1+2+4) + (1+2+5) + \cdots + (9+8+7) \}$$

のように表される。ここで、 $\{ (1+2+3) + (1+2+4) + (1+2+5) + \cdots + (9+8+7) \}$ においてそれぞれの数字が登場する回数を考える。例えば、番号 1 の札が 1 回目に取り出される場合の数は、他の 2 枚の番号札の出方を考えて、

$${}_8P_2 = 56 \text{ 通り}$$

である。2 回目、3 回目に取り出されるときも同様であるから、結局番号 1 が登場する回数は

$$3 \cdot 56 = 168 \text{ 回}$$

である。他の数字が登場する回数も等しく 168 回であるから、期待値 E_1 は

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{{}_9P_3} \{ (1+2+3) + (1+2+4) + (1+2+5) + \cdots + (9+8+7) \} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot (1+2+3+\cdots+9) \cdot 168 \\ &= 15 \end{aligned}$$

と求まる。

さらに、得られる 3 桁の数の期待値を E_2 とすると

$$E_2 = \frac{1}{{}_9P_3} \{ (1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1) + (1 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1) + \cdots + (9 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1) \}$$

と表される。番号 1 が百の位、十の位、一の位として加算される回数はそれぞれ ${}_8P_2 = 56$ 回であり、他の番号についても同様であるから、

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{{}_9P_3} \cdot (1+2+\cdots+9) \cdot 56 \cdot (100+10+1) \\ &= 555 \end{aligned}$$

と求まる。

また、この 3 桁の数が奇数である確率は、3 回目に奇数の番号札を取り出す確率と等しいから、

$$\frac{5}{9}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$y = e^{ax} (2e^{-2ax} - ae^{-ax} + 1) \text{ より,}$$

$$y' = ae^{ax} (1 - 2e^{-2ax})$$

 $y' = 0$ のとき

$$x = \frac{1}{2a} \log 2$$

x	...	$\frac{1}{2a} \log 2$	...
y'	-	0	+
y	$\searrow$		$\nearrow$

 増減表と、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \infty$ より、求める条件は、

$$y|_{x=\frac{1}{2a} \log 2} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a + 1 \right) < 0$$

$$\therefore a > 2\sqrt{2}$$

 $e^{ax} > 0$ から、 $y = 0$ となるとき、

$$2e^{-2ax} - ae^{-ax} + 1 = 0$$

 $e^{-ax} = t$ とおくと、

$$2t^2 - at + 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{4}$$

$$\therefore e^{-ax} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{4}$$

$$\therefore -ax = \log(a \pm \sqrt{a^2 - 8}) - 2 \log 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{a} \left\{ 2 \log 2 - \log(a \pm \sqrt{a^2 - 8}) \right\}$$

 $p < q$ より、

$$p = \frac{1}{a} \left\{ 2 \log 2 - \log(a + \sqrt{a^2 - 8}) \right\}$$

$$q = \frac{1}{a} \left\{ 2 \log 2 - \log(a - \sqrt{a^2 - 8}) \right\}$$

(答) $a > 2\sqrt{2}$

$$p = \frac{1}{a} \left\{ 2 \log 2 - \log(a + \sqrt{a^2 - 8}) \right\}$$

$$q = \frac{1}{a} \left\{ 2 \log 2 - \log(a - \sqrt{a^2 - 8}) \right\}$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_p^q \left\{ e^{ax} (2e^{-2ax} - ae^{-ax} + 1) + a \right\} dx \\ &= \int_p^q (2e^{-ax} + e^{ax}) dx \\ &= \frac{2\sqrt{a^2 - 8}}{a} \end{aligned}$$

$$(答) \quad S = \frac{2\sqrt{a^2 - 8}}{a}$$

(3)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1 - \frac{8}{a^2}}}{1} = 2$$

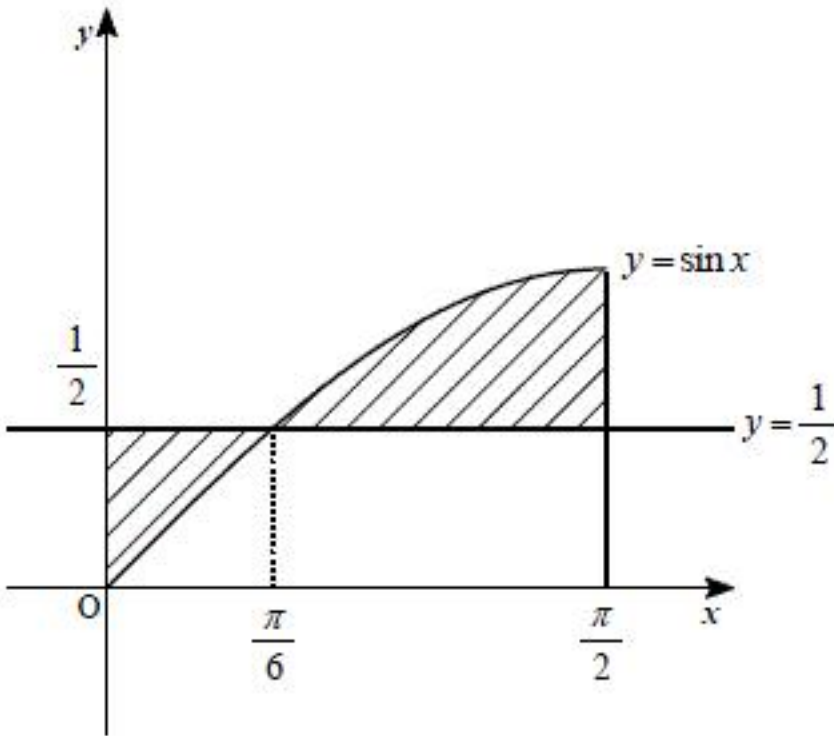
$$(答) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S = 2$$

〔Ⅳ〕

(1)

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき,

$$D: \left(y - \frac{1}{2}\right)(y - \sin x) \leq 0$$

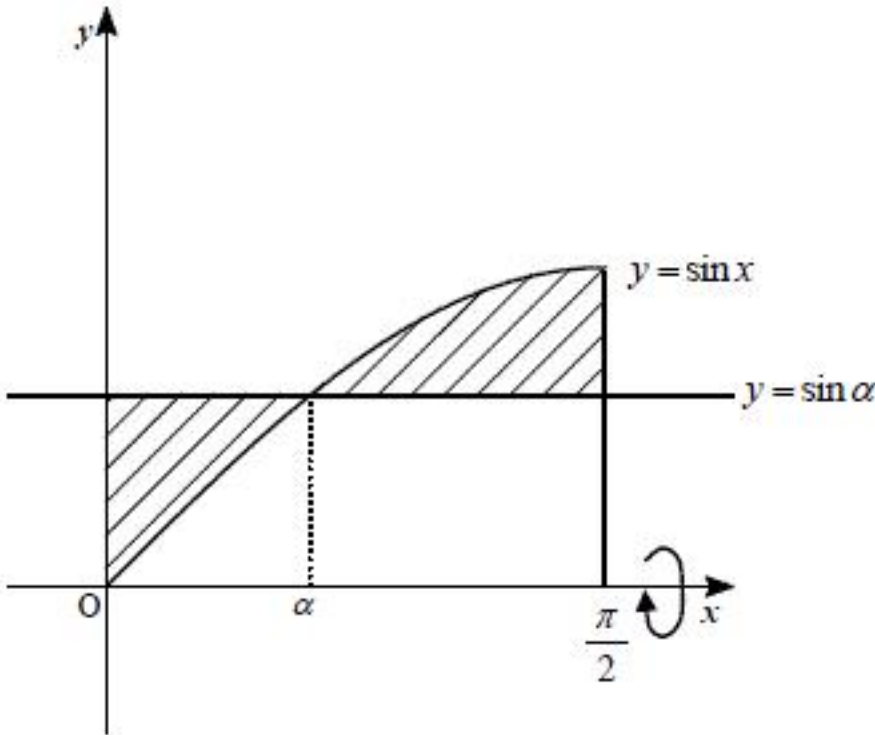


求める領域は、上図斜線部(境界含む)。また、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

(答) $S = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$

(2)



$$V = \pi \int_0^{\alpha} (\sin^2 \alpha - \sin^2 x) dx + \pi \int_{\alpha}^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^2 \alpha) dx$$

ここで、 $\sin^2 \alpha - \sin^2 x = \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ を積分した関数の 1 つを $F(x)$ とおくと、

$$F(x) = \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

よって、

$$\begin{aligned} V &= \pi(F(\alpha) - F(0)) + \pi\left(F(\alpha) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \pi\left(2F(\alpha) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \pi\left\{\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right\} \end{aligned}$$

(答) $V = \pi\left\{\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right\}$

(3)

$$V' = \left\{4\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin \alpha \cos \alpha\right\}\pi$$

$V' = 0$ とすると、

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

α	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
V'		-	0	+	
V	$\frac{\pi^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$

増減表より、

$$V \text{ の最小値: } \frac{\pi}{2} \quad (\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき})$$

(答) $V \text{ の最小値: } \frac{\pi}{2} \quad (\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき})$

(4)

増減表より、

$$V \text{ の最大値: } \frac{\pi^2}{4} \quad (\sin \alpha = \sin 0 = 0 \text{ あるいは } \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ のとき})$$

(答) $V \text{ の最大値: } \frac{\pi^2}{4} \quad (\sin \alpha = 0, 1 \text{ のとき})$