

〔Ⅰ〕

ア 3 イ 0 ウ 0 エ $\frac{27}{2}$

オ $y = (6t^2 - 18t)x - 4t^3 + 9t^2 + 27$

カ -1 キ $\frac{13}{2}$ ク $y = 24x - 85$

ケ $y = -x + 15$ コ $\frac{27}{2}$

【解説】

まず、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\ f'(x) &= 6x^2 - 18x \\ &= 6x(x - 3) \end{aligned}$$

となるので、増減表を書くと、

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

となる。よって、 $x = 3$ のとき極小値 $f(3) = 0$ をとる。

また、 $2^x = A$ とすると

$$A > 0 \cdots \textcircled{1}$$

であり

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^{3x} - \frac{9}{2} \cdot 2^{2x} + k &= 0 \\ \Leftrightarrow A^3 - \frac{9}{2} A^2 + k &= 0 \end{aligned}$$

となる。この左辺を $h(A)$ とすると

$$\begin{aligned} h'(A) &= 3A^2 - 9A \\ &= 3A(A - 3) \end{aligned}$$

となる。①に注意しながら増減表を書くと

x	0	...	3	...
$h'(A)$		-	0	+
$h(A)$		↘	極小	↗

となる。ここで、 $g(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つことは $h(A) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つことであるので、その条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} h(0) > 0 \\ h(3) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} k > 0 \\ -\frac{27}{2} + k < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &0 < k < \frac{27}{2} \end{aligned}$$

となる。

次に曲線 C の点 P における接線 l は

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y - (2t^3 - 9t^2 + 27) &= 6t(t - 3)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 6t(t - 3)x - 4t^3 + 9t^2 + 27 \end{aligned}$$

である。直線 l が $(0, 40)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 40 &= -4t^3 + 9t^2 + 27 \\ \Leftrightarrow 4t^3 - 9t^2 + 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)(4t^2 - 13t + 13) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つが、 $4t^2 - 13t + 13 = 0$ は実数解を持たないので

$$t = -1$$

である。このとき接線 l は

$$y = 24x + 40$$

なので C との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x^3 - 9x^2 + 27 &= 24x + 40 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 - 24x - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2(2x - 13) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, \frac{13}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、交点 Q の x 座標は $\frac{13}{2}$ となる。

また、 C 上のある点を $R(s, f(s))$ とし、 R での接線 m は直線 l (傾き 24) と平行なので、

$$\begin{aligned} f'(s) &= 24 \\ \Leftrightarrow 6s^2 - 18s &= 24 \\ \Leftrightarrow (s + 1)(s - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= -1, 4 \end{aligned}$$

となり、 $s \neq t (= -1)$ なので $s = 4$ となる。よって、 $R(4, 11)$ となるので、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y - 11 &= 24(x - 4) \\ \Leftrightarrow y &= 24x - 85 \end{aligned}$$

となる。

よって、2 点 $P(-1, 16)$ 、 $R(4, 11)$ を通る直線 n の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{11 - 16}{4 - (-1)}(x + 1) + 16 \\ \Leftrightarrow y &= -x + 15 \end{aligned}$$

となる。また、直線 n と曲線 C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x + 15 &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4)(2x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 4, \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、交点 S の x 座標は $\frac{3}{2}$ とわかり、 y 座標は

$$y = -\frac{3}{2} + 15 = \frac{27}{2}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

(1)

解と係数の関係より($\alpha = a + b\sqrt{5}$ 、もう1つの解を β として)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = (a + b\sqrt{5}) + \beta = p^2 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = (a + b\sqrt{5}) \cdot \beta = -q & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$p^2, -q$ がともに整数であることに注意すると、①より $\beta = c - b\sqrt{5}$ (c : 整数) とかけるので、

②に代入して

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{5})(c - b\sqrt{5}) &= -q \\ (ac - 5b^2) + (c - a)b\sqrt{5} &= -q \end{aligned}$$

左辺が整数になるのは $c = a$ のとき。よって、 $\beta = a - b\sqrt{5}$ となり、 $x = a - b\sqrt{5}$ を解にもつことが示された。

(証明終)

(2)

①式より $2a = p^2$

p^2 が偶数 $\Leftrightarrow p$ が偶数

であり、かつ p は素数であるから、 $p = 2$

このとき $a = 2$

(答) $p = 2, a = 2$

(3)

$q = 2$ とすると、②式より、 $b^2 = \frac{6}{5}$ となるので、これは b が整数であることに反する。 q は素数かつ $q \neq 2$ より、 q は奇数である。②式より

$$5b^2 = q + 4$$

よって、 $5b^2$ は奇数(かつ5の倍数)であるから、 $5b^2 = 5(2m - 1) = 10m - 5$ (m : 自然数) とかける。

$$\therefore q = 10m - 5 - 4 = 10(m - 1) + 1$$

余りは1

(答) 1

(4)

$5b^2$ が奇数 $\Leftrightarrow b$ が奇数

また、 q の値は、 b の値が大きくなるほど、大きくなるので、 b の値の小さい順に考えればよい。

b	q
1	1
3	41
5	121
7	241
$\vdots$	$\vdots$

上表より、

$$(b, q) = (3, 41), (7, 241)$$

となる。

(答) $(b, q) = (3, 41), (7, 241)$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 4\theta &= 2(\cos 2\theta)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 4\theta &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}a_1 &= 2\cos p && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_2 &= a_1^2 - 2 = 2\cos 2p \\ a_3 &= a_2^2 - 2 = 2\cos 4p \\ &\vdots \\ a_n &= 2\cos(2^{n-1}p)\end{aligned}$$

と推測できる。(帰納法による証明)

[1] $n=1$ のとき

①より成立。

[2] $n=k$ のとき

$a_k = 2\cos(2^{k-1} \cdot p)$ が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k^2 - 2 \\ &= \{2\cos(2^{k-1} \cdot p)\}^2 - 2 \\ &= 2\{2\cos^2(2^{k-1} \cdot p) - 1\} \\ &= 2\cos(2^k \cdot p)\end{aligned}$$

となり、確かに成立。

[1], [2]より、すべての自然数 n に対して

$$a_n = 2\cos(2^{n-1} \cdot p)$$

$$(\text{答}) \quad a_n = 2\cos(2^{n-1} \cdot p)$$

(3)

$$\begin{aligned}f(2t) &= 2\{f(t)\}^2 - 1 \\ f(4t) &= 2\{f(2t)\}^2 - 1 \\ &= 8\{f(t)\}^4 - 8\{f(t)\}^2 + 1\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f(2t) = 2\{f(t)\}^2 - 1$$

$$f(4t) = 8\{f(t)\}^4 - 8\{f(t)\}^2 + 1$$

(4)

$$\begin{aligned}\alpha &= 3^c + 3^{-c} \\ (3^c)^2 - \alpha \cdot 3^c + 1 &= 0\end{aligned}$$

$3^c > 1$ より

$$\begin{aligned}3^c &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \\ \therefore c &= \log_3 \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad c = \log_3 \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

(5)

$$\begin{aligned}a_1 &= 2f(c) \\ a_2 &= a_1^2 - 2 = 2f(2c) \\ a_3 &= a_2^2 - 2 = 2f(4c) \\ &\vdots \\ a_n &= 2f(2^{n-1} \cdot c)\end{aligned}$$

と推測できる。(帰納法による証明)

[1] $n=1$ のとき

②より成立。

[2] $n=k$ のとき

$a_k = 2f(2^{k-1} \cdot c)$ が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k^2 - 2 \\ &= \{2f(2^{k-1} \cdot c)\}^2 - 2 \\ &= 2\left[2\{f(2^{k-1} \cdot c)\}^2 - 1\right] \\ &= 2f(2^k \cdot c)\end{aligned}$$

となり確かに成立。

[1], [2]よりすべての自然数 n に対して

$$\begin{aligned}a_n &= 2f(2^{n-1} \cdot c) \\ &= 3^{2^{n-1}c} + 3^{-2^{n-1}c}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = 3^{2^{n-1}c} + 3^{-2^{n-1}c}$$