

2012年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ。

- (1) 2次方程式 $3x^2 - (1 + 2\sqrt{2})x + \alpha = 0$ の2つの解が, $\cos \theta, \sin \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) と書けるとする. 解と係数の関係より $\cos \theta + \sin \theta =$ ア であり, $\cos \theta \sin \theta =$ イ となる. これより, $\alpha =$ ウ となり, $\cos \theta =$ エ , $\sin \theta =$ オ となる.

- (2) 曲線 $C_1: y = \log_2 x$ と x 軸との交点の座標は (カ , 0) であり, 曲線 $C_2: y = \log_4 (x + 2)$ と y 軸との交点の座標は (0, キ) である. また曲線 C_1 と C_2 の交点の座標は (ク , ケ) である. 曲線 C_1 と曲線 C_2 と x 軸 および y 軸で囲まれる部分の面積は コ である.

〔Ⅱ〕 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して, $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) A^2 と A^3 を求めよ.
- (2) 数列 $\{p_n\}, \{r_n\}, \{s_n\}$ の一般項を推測して, その結果を数学的帰納法によって証明せよ.
- (3) q_{n+1} を q_n を用いて表せ.
- (4) 数列 $\{q_n\}$ の一般項を求めよ.
- (5) $a \neq 0, b > 0$ とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ $a_n = ap_n + bq_n$, $b_n = ar_n + bs_n$ で定める. このとき $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, および $v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ を求めよ.

〔Ⅲ〕 $a > 0$ とする. 座標平面において 2 つの曲線 $C_1 : y = e^x - e^a + 1$ および曲線 $C_2 : x = a - \log y$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ.
- (2) 曲線 C_1 と C_2 の概形を描け.
- (3) 曲線 C_1, C_2 および y 軸で囲まれる図形 D の面積 S を求めよ.
- (4) 図形 D と領域 $y \leq 0$ の共通部分の面積が 1 となるときの a の値を求めよ.

〔Ⅳ〕 O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(a, 0), B(0, 1)$ をとる. ただし $a > 0$ とする. 線分 OA 上に点 $P(p, 0)$ ($0 \leq p < a$) をとり, 点 P から線分 AB に下ろした垂線の足を Q とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 PQ の長さを求めよ.
- (2) $\triangle BPQ$ を線分 AB のまわりに 1 回転してできる円錐の体積を V とする. V を p を用いて表せ.
- (3) $0 \leq p < a$ のとき, V の最大値を求めよ.