

2012年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余白

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

余 白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定めると数列 $\{b_n\}$ は、漸化式 $b_{n+1} =$ ア $b_n +$ イ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす. したがって、数列 b_n の一般項は ウ であり 数列 a_n の一般項は エ である.

- (2) 座標平面において、媒介変数 θ を用いて、 $x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と表される曲線 C を考える. x は $\theta =$ オ のとき最小値 カ をとり、 y は $\theta =$ キ のとき最大値 ク をとる.

曲線 C 上の動点 $(x, y) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta)$ と原点との距離 r は、媒介変数 θ を用いて ケ と表される. したがって、 r の最大値は コ である.

〔 II 〕 四面体 $OABC$ において $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ の重心をそれぞれ P, Q, R とする. $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.
- (2) $\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍になっているかを求めよ.
- (3) $\triangle ABC$ の重心を S とする. 四面体 $PQRS$ の体積は四面体 $OABC$ の体積の何倍になっているかを求めよ.

〔Ⅲ〕 次式がすべての実数 x について成り立つとき、次の問いに答えよ。

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = \log(1+x^2)$$

- (1) 関数 $f(x)$ を求め、そのグラフの概形を描け。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を $P(a, 0)$, $Q(b, 0)$ ($a < b$) とする。
 a と b の値を求めよ。
- (3) $a \leq x \leq b$ において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ。
- (4) 関数 $g(x)$, $h(x)$ を $g(x) = x \int_0^x f(t)dt$, $h(x) = \frac{2}{1+x^2}$ とする。
このとき、曲線 $y = g(x)$ と曲線 $y = h(x)$ で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ。

〔Ⅳ〕 $-2 < \alpha < 2$ とし、座標平面において、点 $P(\alpha, 0)$ を通る y 軸と平行な直線を l 、直線 l と楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点を Q , R とする。ただし、 Q の y 座標は R の y 座標より大きいとする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q , R の座標を α を用いて表せ。
- (2) 線分 QR を直径とする円 C の方程式を求めよ。
- (3) α が $-2 < \alpha < 2$ を動くとき、円 C の通りうる範囲 D を図示せよ。
- (4) (3) で求めた範囲 D において、 x 座標が最大となる点を求め、この点を通る円 C の方程式を求めよ。

以下余白

