

2012年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ.

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ は $A^2 - 7A + \text{ア} E = O$ を満たす. ただし E は単位行列, O は零行列である. よって実数 $c_1 = \text{イ}$ を用いて $A^2 - A = c_1(A - E)$ と変形できる. 更に数列 $c_n = \text{ウ}$ を用いて $A^{n+1} - A^n = c_n(A - E)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つ. したがって A^n の $(1, 1)$ 成分は エ となり, A^n の $(2, 2)$ 成分は オ となる.

- (2) 1 から 9 までの 9 枚の番号札を入れた箱がある. その箱から番号札を 1 枚ずつ 3 回取り出す. ただし, 取り出した番号札はもとに戻さない. 取り出した番号がすべて 3 以上で 6 以下である確率は カ であり, また, 取り出した番号の中に 2 以下の番号と 7 以上の番号が両方ある確率は キ である. 取り出した 3 枚の番号の和の期待値は ク である.
最初に取り出した番号を百の位, 次に取り出した番号を十の位, 最後に取り出した番号を一の位として得られる 3 桁の数の期待値は ケ である. また, この 3 桁の数が奇数である確率は コ である.

〔Ⅱ〕 $a > 0$ とする. 曲線 $C: y = e^{ax}(2e^{-2ax} - ae^{-ax} + 1)$ について次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ. また, その 2 交点の x 座標を p, q ($p < q$) とするとき, p と q を a を用いてそれぞれ表せ.
- (2) a が (1) で求めた範囲にあるとき, 曲線 C と直線 $y = -a$ および 2 直線 $x = p, x = q$ で囲まれる部分の面積 S を a を用いて表せ.
- (3) $\lim_{a \rightarrow \infty} S$ を求めよ.

〔Ⅲ〕点 O を原点とする座標空間において、 x 軸の正の部分に点 A 、 y 軸の正の部分に点 B 、 z 軸の正の部分に点 C をとる。△ ABC について、辺 AB の長さを c 、辺 BC の長さを a 、辺 CA の長さを b とする。次の問いに答えよ。

- (1) △ ABC の $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする。 $\overrightarrow{OD}$ を $b, c, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。
- (2) △ ABC の内接円の中心を I とする。 $\overrightarrow{OI}$ を $a, b, c, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。
- (3) $a = b = c$ のとき、 $\overrightarrow{OI}$ が △ ABC を含む平面と直交することを示せ。
- (4) $a = b = c = 3$ のとき、△ ABC の内接円を底面とし、原点 O を頂点とする円錐の体積 V を求めよ。

〔Ⅳ〕 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ とする。座標平面において連立不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 、 $(y - \sin \alpha)(y - \sin x) \leq 0$ の表す領域 D について次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、領域 D を図示せよ。また、この場合の領域 D の面積を求めよ。
- (2) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とする。 V を α を用いて表せ。
- (3) V の最小値とそのときの $\sin \alpha$ の値を求めよ。
- (4) V の最大値とそのときの $\sin \alpha$ の値を求めよ。