

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア	$-\frac{a}{2}$	イ	$-\frac{b}{2}$	ウ	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
エ	$\frac{2}{9}$	オ	$\frac{5}{12}$	カ	$3 \times 11 \times 61$
キ	183	ク	8	ケ	183
コ		コ		コ	0

〔解説〕

(1)

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2$$

であるから、この円の中心の座標は $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 、半径は $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ とわかる。この円の面積が 4π 以下となるとき

$$\pi \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 \leq 4\pi$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 16 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。これを満たすような a, b の組は

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$$

の8通りであるから、円の面積が 4π 以下である確率は

$$\frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$$

と求まる。また、直線 $x + y = a - b$ と円の中心 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ との距離 d は

$$d = \frac{\left|-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - a + b\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} |b - 3a|$$

である。したがって、この円と直線 $x + y = a - b$ が異なる2点で交わるための条件は

$$d < \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b - 3a)^2}{8} < \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 6ab - b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(7a + b) < 0$$

$$\Leftrightarrow a < b \quad (\because a, b > 0)$$

とわかる。 $a = b$ となる場合は6通りあることを考えると、 $a < b$ となるのは

$$(6^2 - 6) \times \frac{1}{2} = 15 \text{通り}$$

ある。よって、円が直線 $x + y = a - b$ と異なる2点で交わる確率は

$$\frac{15}{6^2} = \frac{5}{12}$$

である。

(2)

2013 を素因数分解すると

$$2013 = 3 \times 11 \times 61$$

となる。 $x = 183, y = 0$ は

$$11x + 25y = 2013 \quad \dots \textcircled{1}$$

をみたすことを考えると、①は

$$11(x - 183) + 25y = 0$$

と変形することができるから、①をみたすような整数 x, y は

$$(x, y) = (-25n + 183, 11n)$$

と表すことができる(ただし n は整数)。 x, y がともに0以上であるときは $0 \leq n \leq 7$ であるから、 (x, y) の組は全部で8組できる。また

$$x^2 + y^2 = (-25n + 183)^2 + (11n)^2$$

は n の2次式であるから、これを $f(n)$ とおくと $y = f(n)$ のグラフは下に凸で軸は

$$n = \frac{4575}{746} \left(> \frac{7}{2} \right)$$

なわけ $x = 183, y = 0$ のときである。

〔Ⅱ〕

(1)

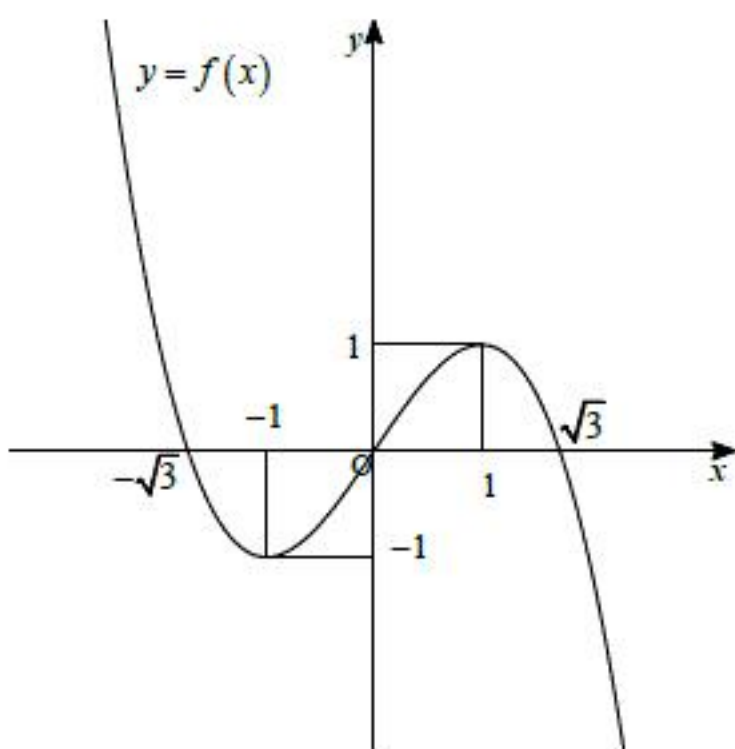
$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

となる。したがって $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

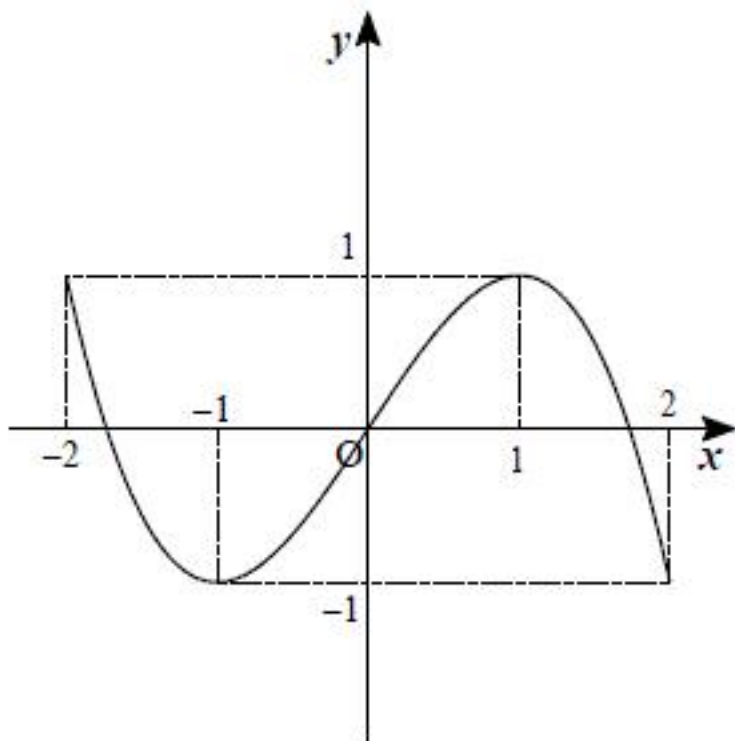
したがって $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$|x| \leq 2$ における $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



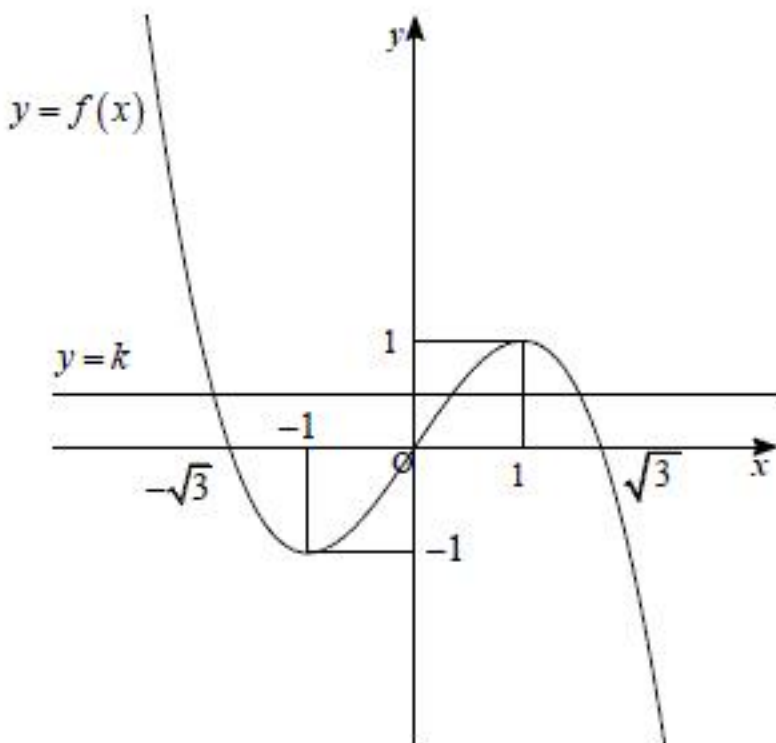
よって、 $|x| \leq 2$ における関数 $y=f(x)$ の最大値 M 、および最小値 m は

$$M=1, m=-1$$

となる。

(答) $M=1, m=-1$

(3)



(2)の結果より $-1 \leq k \leq 1$ となるから、求める共有点の個数は

$k=\pm 1$ のとき 2 個

$-1 < k < 1$ のとき 3 個

である。

(答) $k=\pm 1$ のとき 2 個、 $-1 < k < 1$ のとき 3 個

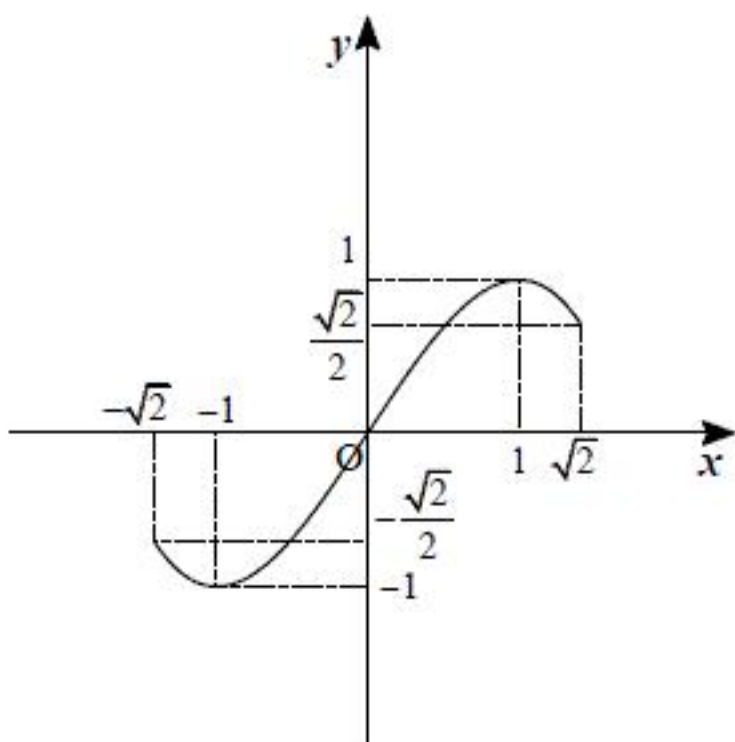
(4)

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) \left\{ -\frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta)^2 + \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $\sin \theta + \cos \theta = x$ とおくと

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$$

となることがわかる。ここで、 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ 、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ である。この範囲における $y=f(x)$ のグラフは下のようになる。



この範囲において θ と x の値は 1 対 1 に対応するから、求める θ の個数は

$K=\pm 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < K < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 1 個

$-1 < K \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq K < 1$ のとき 2 個

である。

(答) $K=\pm 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < K < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 1 個、 $-1 < K \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq K < 1$ のとき 2 個

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} \\ &= 4 + 9 - 10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるから、線分 AB の長さは $\sqrt{3}$ とわかる。また、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 9 - 25} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad AB = \sqrt{3}, S_1 = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

(2)

$\overline{OC} = \vec{c}$ とすると

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(s\vec{a} + t\vec{b}) \\ &= \frac{1+s}{2}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1+s+t}{2} \left(\frac{1+s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{t}{1+s+t}\vec{b} \right) (\because s, t > 0) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\frac{1+s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} = 1$$

であり、さらに、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であることから、点 P は直線 OM 上にあることと線分 AB 上にあることを考えれば

$$\overline{OP} = \frac{1+s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{t}{1+s+t}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OP} = \frac{1+s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{t}{1+s+t}\vec{b}$$

(3)

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(s\vec{a} + t\vec{b}) \\ &= \frac{s}{2}\vec{a} + \frac{1+t}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1+s+t}{2} \left(\frac{s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{1+t}{1+s+t}\vec{b} \right) (\because s, t > 0) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\frac{s}{1+s+t} + \frac{1+t}{1+s+t} = 1$$

であり、さらに、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であることから、点 Q は直線 ON 上にあることと線分 AB 上にあることを考えれば

$$\overline{OQ} = \frac{s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{1+t}{1+s+t}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OQ} = \frac{s}{1+s+t}\vec{a} + \frac{1+t}{1+s+t}\vec{b}$$

(4)

(2), (3) の結果より

$$\begin{aligned} AP : PB &= t : (1+s), \quad AQ : QB = (1+t) : s \\ \Leftrightarrow AP : PQ : QB &= t : 1 : s \end{aligned}$$

となり、4 点 A, P, Q, B はこの順に同一直線状に存在するから

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{PQ}{AB} S_1 \\ &= \frac{PQ}{AP + PQ + QB} S_1 \\ &= \frac{1}{1+s+t} S_1 \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2(1+s+t)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_2 = \frac{\sqrt{11}}{2(1+s+t)}$$

(5)

(4) の結果より、 $S_2 = \frac{1}{4} S_1$ となるとき $s+t=3$ である。したがって点 A', B' を

$$\overline{OA'} = 3\overline{OA}, \quad \overline{OB'} = 3\overline{OB}$$

をみたす点とすると

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= s\vec{a} + t\vec{b} \\ &= \frac{s}{3} \cdot 3\overline{OA} + \frac{t}{3} \cdot 3\overline{OB} \\ &= \frac{s}{3} \overline{OA'} + \frac{t}{3} \overline{OB'} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{3} = 1, \quad s > 0, t > 0$$

であるから、点 C は線分 A'B' 上(ただし点 A', B' は除く)に存在する。

(答) 線分 A'B' 上(ただし点 A', B' は除く)