

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア	$\frac{2a}{3}$	イ	3	ウ	4	エ	$\frac{1}{3}$
オ	$\frac{-2-\sqrt{2}}{12}$	カ	$\frac{1+\sqrt{2}}{36}$	キ	15		
ク	(1, -1, 1)	ケ	j	コ	(5, 11, 9)		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2ax \\ &= 3x \left(x - \frac{2a}{3} \right) \end{aligned}$$

より、 $f'(x)=0$ を満たす x の値は $x=0, \frac{2a}{3}$ である。また3次方程式 $f(x)=0$ が2重解 $x=2$ を持つための条件は

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \text{ かつ } f'(2) = 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 4a + b &= 0 \text{ かつ } \frac{2a}{3} = 2 \\ \Leftrightarrow a &= 3, b = 4 \end{aligned}$$

となる。

(2)

A は1から6の値を確率 $\frac{1}{6}$ でとるから、 $\cos \frac{A}{4}\pi$ の値とそれが起こる確率は以下ようになる。

A	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\cos \frac{A}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

よって、 $\cos \frac{A}{4}\pi$ となる確率は $A=2, 6$ となる確率であるから $\frac{1}{3}$ であり、 $\cos \frac{A}{4}\pi$ の値の期待値は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{-2-\sqrt{2}}{12}$$

である。また $B+C$ のとり得る値とそれが起こる確率、そのときの $\cos \frac{B+C}{4}\pi$ の値は以下のようにになる。

$B+C$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\cos \frac{B+C}{4}\pi$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1

よって、 $\cos \frac{B+C}{4}\pi$ の値の期待値は

$$\begin{aligned} & 0 \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{2}{36} + (-1) \cdot \frac{3}{36} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{4}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{36} + 0 \cdot \frac{3}{36} \\ & + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{2}{36} + (-1) \cdot \frac{1}{36} \\ & = \frac{\sqrt{2}+1}{36} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 {}_3P_k &= 3+6+6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\sum_{k=1}^3 {}_3P_k \right) &= \log_{10} 15 \\ &= \log_{10} \left(3 \cdot \frac{10}{2} \right) \\ &= 1 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \end{aligned}$$

となる。よって、 $(a, b, c) = (1, -1, 1)$ である。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log_{10} {}_n P_k &= \log_{10} \left\{ \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \cdots \frac{n!}{1!} \cdot \frac{n!}{0!} \right\} \\ &= \log_{10} \{ n^n \cdot (n-1)^{n-1} \cdot (n-2)^{n-2} \cdots 2^2 \cdot 1^1 \} \\ &= \sum_{j=1}^n (j \times \log_{10} j) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \log_{10} ({}_6 P_k) &= \sum_{k=1}^6 (k \times \log_{10} k) \\ &= 2 \log_{10} 2 + 3 \log_{10} 3 + 4 \log_{10} 2^2 + 5 \log_{10} \frac{10}{2} + 6 \log_{10} (2 \cdot 3) \\ &= 5 + 11 \log_{10} 2 + 9 \log_{10} 3 \end{aligned}$$

である。

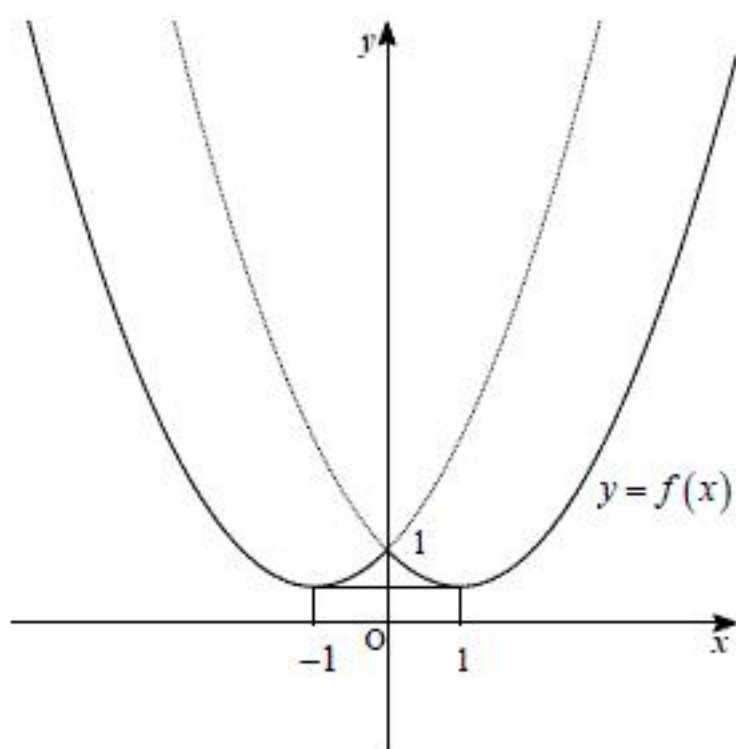
〔Ⅱ〕

(1)

$f(x) = \frac{x^2}{2} - |x| + 1$ であるとき

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} & (0 \leq x \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって曲線 $y = f(x)$ の概形は下図の実線部である。



(答) 前図

(2)

関数 $f(x)$ は $x \neq 0$ で微分可能であり

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & (0 < x \text{ のとき}) \\ x+1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって $y = f(x)$ の接線の傾きが 2 となるのは $x = 3$ のときであるから、直線 L の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2(x-3) + \frac{5}{2} \\ &= 2x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求まる。また、直線 M の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x+2) + 1 \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $L: y = 2x - \frac{7}{2}, M: y = -x - 1$

(3)

2 直線 L, M の交点の座標は

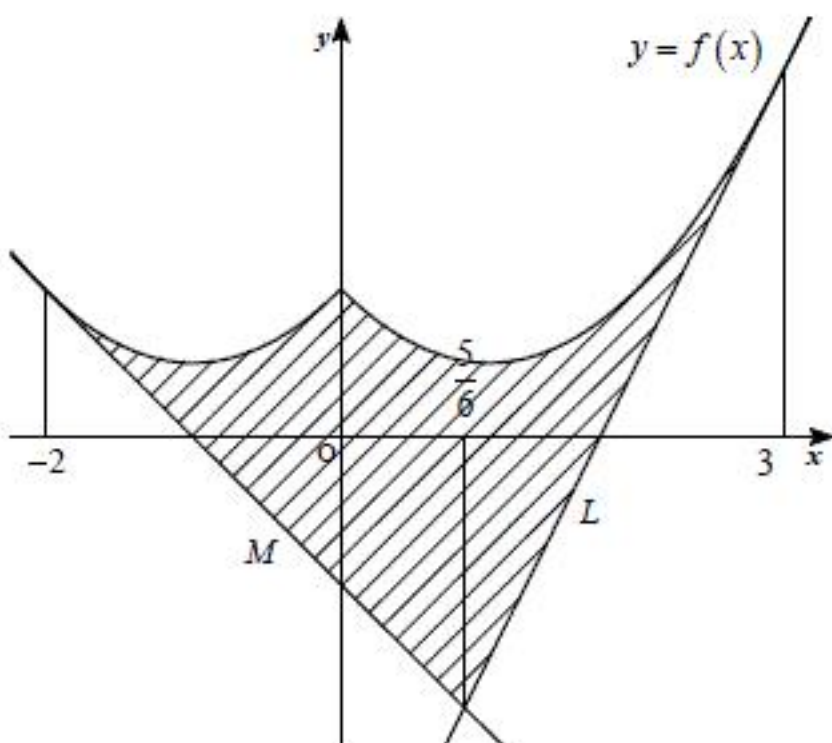
$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2x - \frac{7}{2} \\ y = -x - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -x - 1 = 2x - \frac{7}{2} \\ y = -x - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(x, y) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$

(4)

求めるのは下図の斜線部の領域の面積である。



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right) - (-x - 1) \right\} dx + \int_0^{\frac{5}{6}} \left\{ \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) - (-x - 1) \right\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{5}{6}}^3 \left\{ \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) - \left(2x - \frac{7}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 2 \right) dx + \int_0^{\frac{5}{6}} \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right) dx + \int_{\frac{5}{6}}^3 \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} \right) dx \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 2 \right) dx &= \left[\frac{x^3}{6} + x^2 + 2x \right]_{-2}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{4}{3} + 4 - 4 \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5}{6}} \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right) dx &= \left[\frac{x^3}{6} + 2x \right]_0^{\frac{5}{6}} \\ &= \left(\frac{5^3}{6^4} + \frac{5}{3} \right) - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{5}{6}}^3 \left(\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} \right) dx &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right]_{\frac{5}{6}}^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{27}{2} + \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{5^3}{6^4} - \frac{25}{24} + \frac{15}{4} \right) \\ &= -\frac{5^3}{6^4} + \frac{43}{24} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} + \left(\frac{5^3}{6^4} + \frac{5}{3} \right) + \left(-\frac{5^3}{6^4} + \frac{43}{24} \right) \\ &= \frac{115}{24} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{115}{24}$

〔Ⅲ〕

(1)

△OBCにおいて、余弦定理より

$$\cos \angle BOC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= b \cdot c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

(2)

4つの面の三角形が互いに合同であるとき、(1)と同様にして

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overline{OG} \cdot \overline{OA} &= \frac{1}{4} \left(|\overline{OA}|^2 + \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OC} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}|\overline{OG}|^2 &= \frac{1}{16} |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}|^2 \\ &= \frac{1}{16} \{ a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 - c^2) + (-a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 - b^2 + c^2) \} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}\end{aligned}$$

であるから

$$|\overline{OG}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OG} \cdot \overline{OA} = \frac{a^2}{2}, \quad |\overline{OG}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\overline{AG}|^2 &= |\overline{OG} - \overline{OA}|^2 \\ &= |\overline{OG}|^2 + |\overline{OA}|^2 - 2(\overline{OG} \cdot \overline{OA}) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} + a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}\end{aligned}$$

であるから

$$|\overline{AG}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{AG}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

(4)

(2)と同様に

$$\overline{OG} \cdot \overline{OB} = \frac{b^2}{2}, \quad \overline{OG} \cdot \overline{OC} = \frac{c^2}{2}$$

となるから、(3)と同様にして

$$|\overline{BG}| = |\overline{CG}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

となる。以上より、点Gは四面体OABCに外接する球の中心であることが分かるから、その球の中心を表す位置ベクトルは

$$\overline{OG} = \frac{1}{4} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

であり、半径は $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{順に } \frac{1}{4} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}), \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$