

〔 Ⅰ 〕

〔 解答 〕

$$\begin{array}{llllllll} \text{ア} & -2k & \text{イ} & -2k^2-2k+2 & \text{ウ} & y=-\frac{1}{2}x^2+x+2 & \text{エ} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \text{オ} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ & & \text{カ} & 2 & \text{キ} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \text{ク} & \sqrt{17} & \text{ケ} & (-2, 2, -3) & \text{コ} & \frac{17}{3} \end{array}$$

〔 解説 〕

(1)

C の方程式を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4kx + 2k^2 - 2k + 2 \\ &= (x + 2k)^2 - 2k^2 - 2k + 2 \end{aligned}$$

であるから、 P の座標は $(-2k, -2k^2 - 2k + 2)$ である。

P の座標を (X, Y) とおくと、 $X = -2k$ であるから $k = -\frac{1}{2}X$ である。これを $Y = -2k^2 - 2k + 2$

に代入して、

$$Y = -\frac{1}{2}X^2 + X + 2$$

となり、 k はすべての実数値をとるので X もすべての実数値をとるから、頂点 P の描く曲線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

である。

また、グラフ C が x 軸と異なる二点で交わる時、 x の 2 次方程式 $x^2 + 4kx + 2k^2 - 2k + 2 = 0$ の判別式 D について、 $D > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2k)^2 - (2k^2 - 2k + 2) \\ &= 2k^2 + 2k - 2 > 0 \end{aligned}$$

となる。これを解いて

$$k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < k$$

である。

(2)

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。また $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

である。ここで $0 < \angle BAC < \pi$ より $\sin \angle BAC > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{34}}{6} \end{aligned}$$

である。よって $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{6} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

である。

点 H は平面 ABC 上の点であるから、実数 a, b を用いて $\overrightarrow{AH} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ と表せる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP} \\ &= a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \\ &= a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a+2b-1 \\ 2a+2b \\ 2a-5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。ここで $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow -(-a+2b-1) + 2(2a+2b) + 2(2a-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9a+2b-9 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(-a+2b-1) + 2(2a+2b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a+4b-1 &= 0 \end{aligned}$$

である。これを解いて $a=1, b=0$ である。よって

$$\overrightarrow{PH} = (-2, 2, -3)$$

である。 $|\overrightarrow{PH}| = \sqrt{17}$ であるから、四面体 $ABCP$ の体積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \triangle ABC |\overrightarrow{HP}| &= \frac{1}{3} \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} \\ &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 8, 公比 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ の等比数列だから,

$$a_n = 8 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 8 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \log_{10} a_{n+1} - \log a_n \\ &= \log_{10} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(3)

$b_1 = \log_{10} a_1 = \log_{10} 8$ であるから, (2) より $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \log_{10} 8 + (n-1) \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= n \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} + \log_{10} 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成立する。よって,

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1) \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} + n \log_{10} 4\sqrt{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{2} n(n+1) \log_{10} \frac{2}{\sqrt{5}} + n \log_{10} 4\sqrt{5}$$

(4)

$a_n \geq 1$ のとき, $d_n = a_n \cdot d_{n-1} \geq d_{n-1}$ となるので, $a_n \geq 1$ であれば d_n は増加する。また a_n は

$0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ より単調に減少し, 常に $a_n > 0$ を満たす。よって $a_n \geq 1$ となる最大の n が d_n を最

大にする。 $a_n \geq 1$ の両辺の常用対数をとって,

$$a_n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 8 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{n-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \left(\log_{10} 2 - \frac{1}{2} \log_{10} 5 \right) + 3 \log_{10} 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \left(\log_{10} 2 - \frac{1}{2} (1 - \log_{10} 2) \right) \geq -3 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(3 \log_{10} 2 - 1) \geq -6 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n(3 \log_{10} 2 - 1) \geq -3 \log_{10} 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{-3 \log_{10} 2 - 1}{3 \log_{10} 2 - 1} (\because 3 \log_{10} 2 - 1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \leq 1 + \frac{6}{\frac{1}{\log_{10} 2} - 3}$$

ここで $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$1 + \frac{1806}{97} = 1 + \frac{6}{\frac{1}{0.3010} - 3} < 1 + \frac{6}{\frac{1}{\log_{10} 2} - 3} < 1 + \frac{6}{\frac{1}{0.3011} - 3} = 1 + \frac{18066}{967}$$

$$\therefore 19 < 1 + \frac{6}{\frac{1}{\log_{10} 2} - 3} < 20$$

であるから, $a_n \geq 1$ となる最大の n は 19 であり, このとき等号は成立しない。すなわち d_n を最大にする n は 19 である。

(答) $n=19$

〔Ⅲ〕

(1)

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= \frac{1}{2} \{ (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \} \\ &= \frac{1}{2} (3^2 - 4) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{である。また, } (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc \text{ より}$$

$$\begin{aligned} abc &= -\frac{1}{3} \{ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) - (a^3+b^3+c^3) \} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \left\{ 3 \left(4 - \frac{5}{2} \right) - 6 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad ab+bc+ca = \frac{5}{2}, \quad abc = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \\ &= x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と表せるから, 求める方程式は

$$x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

(3)

$$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= \left(\frac{5}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\text{である。} (a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4 + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &= 4^2 - 2 \cdot \frac{13}{4} \\ &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a^4+b^4+c^4 = \frac{19}{2}$$

(4)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{5}{2} \text{ である。} f'(x) = 0 \text{ の 2 解を } \alpha, \beta (\alpha < \beta) \text{ とすると, 解と係数の関係から,}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \frac{5}{6} \end{cases}$$

である。 $x = \alpha, \beta$ のとき, $f(x)$ はそれぞれ極大値, 極小値をとり, その値は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^3 - 3\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ &= \left(3\alpha^2 - 6\alpha + \frac{5}{2} \right) \left(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \quad (\because f'(\alpha) = 0) \end{aligned}$$

$$f(\beta) = -\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}$$

である。したがって, 求める値は

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \frac{1}{9} \{ \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \} \\ &= -\frac{1}{54} \left(\because \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{54}$$