

【I】

$$(1) \text{ ア } 0 \text{ イ } 8 \text{ ウ } \sqrt{-2k^2+16k} \text{ エ } \frac{k\sqrt{-k^2+8k}}{2} \text{ オ } 6 \text{ カ } 6\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ キ } 4 \text{ ク } \frac{n+3}{n}a_n \text{ ケ } \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \text{ コ } \frac{6n}{n+1}$$

【解説】

(1)

直線 $L: x+y-k=0$ と円 C の中心 $C(2, 2)$ の距離 d は

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2+2-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{|k-4|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であり、円 C と直線 L が 2 点で交わっていることから

$$\begin{aligned} \frac{|k-4|}{\sqrt{2}} &< 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |k-4| &< 4 \\ \Leftrightarrow 0 < k < 8 &\quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。円 C の中心 $C(2, 2)$ から線分 AB に下ろした垂線の足を H とすると、 $\triangle ACH$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{8-d^2} \\ &= \sqrt{8-\frac{(k-4)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{-k^2+8k}{2}} \\ \therefore AB &= 2AH = \sqrt{-2k^2+16k} \end{aligned}$$

と求まる。また k が $\textcircled{1}$ の範囲を動くとき直線 $L: x+y-k=0$ と原点の距離は

$$\frac{|0-0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

である。したがって $\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{-2k^2+16k} \\ &= \frac{k\sqrt{-k^2+8k}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形であるが、これが正三角形になるとき、 $\textcircled{1}$ の範囲に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2}} : \sqrt{-2k^2+16k} &= \sqrt{3} : 2 \\ \Leftrightarrow k &= \sqrt{3(-k^2+8k)} \\ \Leftrightarrow k^2 &= 3(-k^2+8k) \quad (\because k > 0) \\ \Leftrightarrow k(k-6) &= 0 \\ \therefore k &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。 $k=6$ のとき $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{6\sqrt{-6^2+8 \cdot 6}}{2} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$4S_n = (n+3)a_n$ において $n=2$ とすると

$$\begin{aligned} 4(a_1+a_2) &= 5a_2 \\ \therefore a_2 &= 4a_1 = 4 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= \frac{(n+4)a_{n+1}}{4} - \frac{(n+3)a_n}{4} \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{n+3}{n}a_n \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\textcircled{1}$ を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+2}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n-2} \cdots \frac{4}{1} \cdot a_1 \\ &= \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)} \\ &= 6 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{6n}{n+1} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} t &= x^2 - 3x \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 3$ のとき $-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$ となる。

(答) $-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-3) \cdot (x-1)(x-2) \\ &= (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) \\ &= t(t+2) \\ &= t^2 + 2t \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x) = t^2 + 2t$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 + 2t \\ &= (t+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

である。 $-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$ であるから、 $f(x)$ は $t = -\frac{9}{4}$ のとき最大値 $\frac{9}{16}$ を、 $t = -1$ のとき最小値 -1 をとる。

(答) 最大値 $\frac{9}{16}$ ，最小値 -1

(4)

$-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$ のとき $t = x^2 - 3x$ を満たす実数 x の個数は

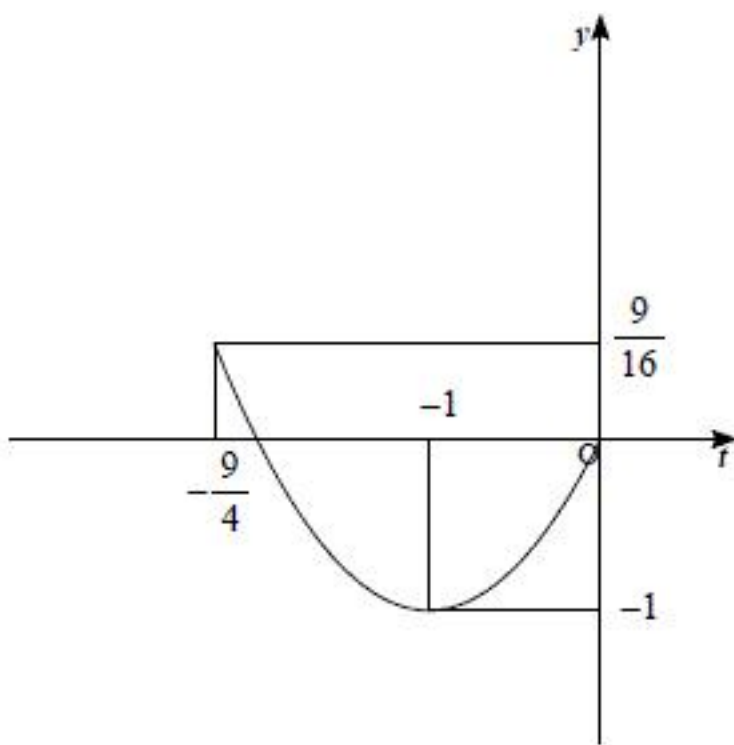
$t = -\frac{9}{4}$ のとき 1 個

$-\frac{9}{4} < t \leq 0$ のとき 2 個

である。したがって、方程式 $f(x) = k$ が 2 つの実数解を持つための条件は

「 $t^2 + 2t = k$ が $-\frac{9}{4} < t \leq 0$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつこと」

である。 $y = t(t+2)$ ($-\frac{9}{4} \leq t \leq 0$) のグラフは下図のようになる。



よって、求める条件は

$k = -1, 0 < k < \frac{9}{16}$

である。

(答) $k = -1, 0 < k < \frac{9}{16}$

〔Ⅲ〕

(1)

$28=2^2 \cdot 7$ より, 28 の約数は $1, 2, 4, 7, 14, 28$ である。

(答) $1, 2, 4, 7, 14, 28$

また,

$$1+2+4+7+14+28=56=28 \cdot 2$$

であることから 28 は完全数である。

(証明終)

(2)

a, b が異なる 2 つの素数であるとき, $N=ab$ の約数は $1, a, b, ab$ である。 N が完全数であるとき

$$\begin{aligned} 1+a+b+ab &= 2ab \\ \Leftrightarrow ab-a-b+1 &= 2 \\ \Leftrightarrow (a-1)(b-1) &= 2 \end{aligned}$$

となる。 a, b が素数であることよりこれを満たす a, b は

$$(a, b) = (2, 3), (3, 2)$$

のみであるから, 求める完全数は 6 である。

(答) 6

(3)

$x \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)-(x^2-x-1) &= 2x+2 \\ &> 0 \\ 7(x^2-x-1)-(x^2+x+1) &= 6x^2-8x-8 \\ &= 2(3x+2)(x-2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$x^2-x-1 < x^2+x+1 \leq 7(x^2-x-1)$$

が成り立つ。 $x \geq 2$ のとき

$$x^2-x-1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0$$

であることを考えると,

$$1 < \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \leq 7$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

異なる 2 つの素数 c, d に対して, $N=c^2d$ が完全数であるとき

$$\begin{aligned} (1+c+c^2)(1+d) &= 2c^2d \\ \Leftrightarrow (1+c-c^2)d &= -(1+c+c^2) \\ \Leftrightarrow d &= \frac{c^2+c+1}{c^2-c-1} \quad (\because c \geq 2 \text{ より, } c^2-c-1 > 0) \end{aligned}$$

となる。 c は素数で $c \geq 2$ を満たすから, (3) の結果より

$$1 < d \leq 7$$

とわかる。これを満たす素数 d は $d=2, 3, 5, 7$ である。

[1] $d=2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{c^2+c+1}{c^2-c-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow c^2+c+1 &= 2(c^2-c-1) \\ \Leftrightarrow c^2-3c-3 &= 0 \end{aligned}$$

となるが, これを満たす素数 c は存在しない。

[2] $d=3$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{c^2+c+1}{c^2-c-1} &= 3 \\ \Leftrightarrow c^2+c+1 &= 3(c^2-c-1) \\ \Leftrightarrow c^2-2c-2 &= 0 \end{aligned}$$

となるが, これを満たす素数 c は存在しない。

[3] $d=5$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{c^2+c+1}{c^2-c-1} &= 5 \\ \Leftrightarrow c^2+c+1 &= 5(c^2-c-1) \\ \Leftrightarrow 2c^2-3c-3 &= 0 \end{aligned}$$

となるが, これを満たす素数 c は存在しない。

[4] $d=7$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{c^2+c+1}{c^2-c-1} &= 7 \\ \Leftrightarrow c^2+c+1 &= 7(c^2-c-1) \\ \Leftrightarrow 3c^2-4c-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3c+2)(c-2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。これを満たす素数 c は $c=2$ である。

以上 [1], [2], [3], [4] より, 条件に適しているのは $c=2, d=7$ のみであり, このとき $N=28$ となる。

(答) 28

(5)

異なる 2 つの素数 e, f に対して, $N=e^2f^2$ で表される完全数が存在すると仮定すると,

$$(1+e+e^2)(1+f+f^2)=2e^2f^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たすような異なる 2 つの素数 e, f が存在することになる。一般に整数 n に対して

$$1+n+n^2=n(n+1)+1$$

は奇数になるから, $\textcircled{1}$ の左辺は奇数である。しかし, $\textcircled{1}$ の右辺は偶数であり矛盾する。よって, 異なる 2 つの素数 e, f を用いて $N=e^2f^2$ と表されるような完全数は存在しない。

(証明終)