

〔 I 〕

〔解答〕

$$(1) \quad \text{ア} \quad -2 \quad \text{イ} \quad 4 \quad \text{ウ} \quad k \leq 2\log_2 3$$

$$(2) \quad \text{エ} \quad (-4, -3) \quad \text{オ} \quad a < -2, -\frac{1}{3} < a$$

$$(3) \quad \text{カ} \quad 3\sqrt{5} \quad \text{キ} \quad \frac{9\sqrt{55}}{11} \quad \text{ク} \quad \frac{5\sqrt{11}}{18}$$

$$\text{ケ} \quad 5\sqrt{5} \quad \text{コ} \quad \frac{25\sqrt{11}}{4}$$

〔解説〕

(1)

真数条件より

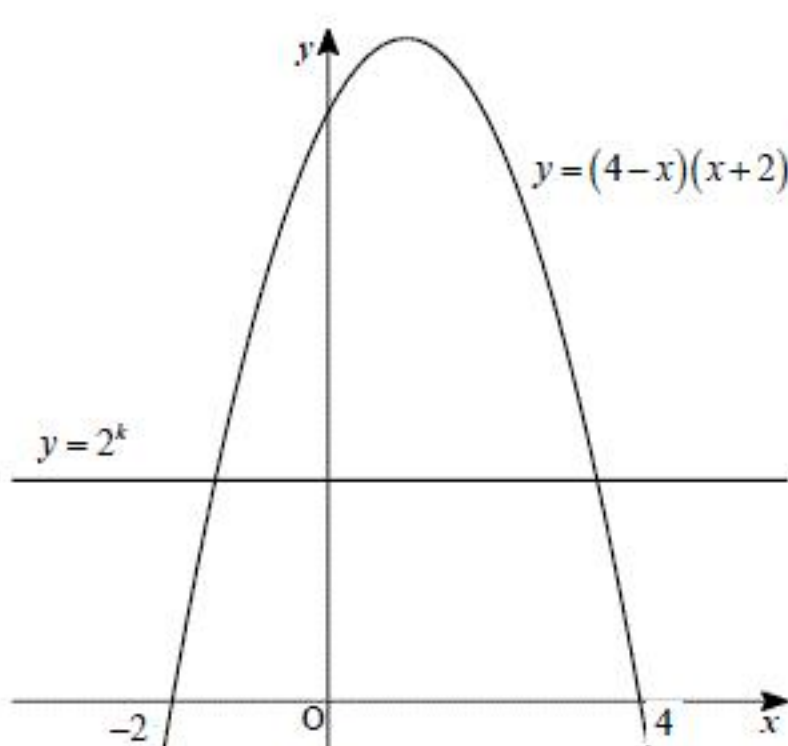
$$\begin{cases} 4-x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \log_2(4-x) + \log_2(x+2) &= k \\ \Leftrightarrow \log_2(4-x)(x+2) &= \log_2 2^k \\ \Leftrightarrow (4-x)(x+2) &= 2^k \end{aligned}$$

となる。つまり $y = (4-x)(x+2)$ と $y = 2^k$ の交点が $-2 < x < 4$ で存在すればよい。

$y = (4-x)(x+2)$ と $y = 2^k$ のグラフを描くと以下の図のようになる。



$2^k > 0$ であるから、図より $y = (4-x)(x+2)$ と $y = 2^k$ が交点を持つとき、解は $-2 < x < 4$ となる。ここで、 $y = (4-x)(x+2)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} y &= (4-x)(x+2) \\ &= -x^2 + 2x + 8 \\ &= -(x-1)^2 + 9 \end{aligned}$$

となることから、 $y = (4-x)(x+2)$ の頂点の座標は $(1, 9)$ である。したがって、図より

$y = (4-x)(x+2)$ と $y = 2^k$ が交点を持つのは

$$\begin{aligned} 0 < 2^k &\leq 9 \\ \therefore k &\leq 2\log_2 3 \end{aligned}$$

となるときである。つまり $\log_2(4-x) + \log_2(x+2) = k$ が解をもつ条件は $k \leq 2\log_2 3$ である。

(2)

$$\begin{aligned} (1+3a)x - (2+a)y &= 2-9a \\ \Leftrightarrow (3x-y+9)a + x-2y-2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。これを a の恒等式とみると

$$\begin{cases} 3x-y+9=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

となる。つまり $(1+3a)x - (2+a)y = 2-9a$ は a の値に関わらず定点 $(-4, -3)$ を通る。

次に直線 L が第 1 象限を通る場合について考える。 L は $(-4, -3)$ を通るため、 L の傾きが 0 以下の場合や y 軸に平行な直線である場合には第 1 象限を通らない。逆に、それ以外の場合は、十分大きい x, y について、点 (x, y) が第 1 象限にあるから、直線 L は第 1 象限を通る。したがって、「傾きが正である」ことが必要十分条件であるとわかる。

y 軸に平行ではないから

$$\begin{aligned} 2+a &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a &\neq -2 \end{aligned}$$

となる。この条件のもとで

$$\begin{aligned} (1+3a)x - (2+a)y &= 2-9a \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1+3a}{2+a}x + \frac{9a-2}{2+a} \end{aligned}$$

となる。この傾きが正であるのは

$$\frac{1+3a}{2+a} > 0$$

を満たすときである。両辺に $(2+a)^2 (> 0)$ をかけても不等号の向きは変化せず、

$$(1+3a)(2+a) > 0$$

を得る。よって、求める a の範囲は、

$$a < -2 \text{ または } a > -\frac{1}{3}$$

とわかる。

(3)

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \\ &= 45 \\ \therefore AC &= 3\sqrt{5} \quad (\because AC > 0) \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

となる。円 S は $\triangle ABC$ の外接円だから、正弦定理を用いると円 S の半径 R は

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{AC}{\sin \angle ABC} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{9\sqrt{55}}{11} \end{aligned}$$

となる。

四角形 $ABCD$ は円に外接するから、

$$\begin{aligned} \sin \angle ADC &= \sin(\pi - \angle ABC) \\ &= \sin \angle ABC \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle ADC &= \cos(\pi - \angle ABC) \\ &= -\cos \angle ABC \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

となる。また、 $AC = CD = 3\sqrt{5}$ より $\triangle ACD$ は $AC = CD$ の二等辺三角形である。よって

$$\begin{aligned} \sin \angle ACD &= \sin(\pi - 2\angle ADC) \\ &= \sin 2\angle ADC \\ &= 2 \sin \angle ADC \cos \angle ADC \\ &= \frac{5\sqrt{11}}{18} \end{aligned}$$

となる。また $\triangle ACD$ に正弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{AD}{\sin \angle ACD} \\ \Leftrightarrow AD &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。以上から $\triangle ACD$ の面積は

$$\frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD = \frac{25\sqrt{11}}{4}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$S_1 = a_1$ より

$$a = \frac{1}{6}a(3-a)$$

$$\Leftrightarrow a(a+3) = 0$$

となる。 $a \neq 0$ より

$$a(a+3) = 0$$

$$\Rightarrow a = -3$$

となる。

(答) $a = -3$

(2)

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{6}a_{n+1}(3-a_{n+1}) - \frac{1}{6}a_n(3-a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}(a_{n+1}+3) = a_n(a_n-3)$$

となる。

(答) $a_{n+1}(a_{n+1}+3) = a_n(a_n-3)$

(3)

$a_4 = 9$ と問題の条件, および(1)より $a_1 = -3$ であることを利用すると,

$$\begin{cases} S_2 = \frac{1}{6}a_2(3-a_2) \\ S_3 = \frac{1}{6}a_3(3-a_3) \\ S_4 = \frac{1}{6}a_4(3-a_4) \\ a_4 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{1}{6}a_2(3-a_2) \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{6}a_3(3-a_3) \\ a_1 + a_2 + a_3 = -18 \\ a_4 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_2+6)(a_2-3) = 0 \\ (a_3+9)(a_3-12) = 0 \\ a_2 + a_3 = -15 \\ a_4 = 9 \end{cases}$$

$$\therefore (a_2, a_3) = (-6, -9)$$

を得る。

(答) $a_2 = -6, a_3 = -9$

(4)

$a_n = (-3)r^{n-1}$ とおく

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{6}(-3r^n)(3+3r^n) - \frac{1}{6}(-3r^{n-1})(3+3r^{n-1}) \\ &= -\frac{3}{2}\{-r^{n-1} + r^n - r^{2(n-1)} + r^{2n}\} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= a_{n+1} \\ &= (-3)r^n \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} -3r^n &= -\frac{3}{2}\{-r^{n-1} + r^n - r^{2(n-1)} + r^{2n}\} \\ \Leftrightarrow r^{2n} - r^n - r^{n-1} - r^{2(n-1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^{n+1} - r - 1 - r^{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^{n-1}(r^2 - 1) - (r+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r^{n-1}(r+1)(r-1) - (r+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (r+1)(r^n - r^{n-1} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで, $r+1 \neq 0$ であると仮定すると, 任意の n に対して

$$r^n - r^{n-1} - 1 = 0$$

が成立する必要がある。特に, $n=1$ のとき成立するから

$$\begin{aligned} r - 1 - 1 &= 0 \\ \therefore r &= 2 \end{aligned}$$

である必要がある。しかし, $n=2$ のとき

$$2^2 - 2 - 1 \neq 0$$

より, $r=2$ は不適切である。したがって, 矛盾し $r+1=0$ であることがわかる。したがって,

$$\begin{aligned} r+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -1 \end{aligned}$$

となる。したがって $a_n = -3(-1)^{n-1}$ となる。

(答) $a_n = -3(-1)^{n-1}$

(5)

$a_n = -3 + d(n-1)$ とおく。等比数列の和は

$$S_n = \frac{n\{-6 + d(n-1)\}}{2}$$

と表すことができる。また

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{6}a_n(3-a_n) \\ &= \frac{1}{6}\{-3 + d(n-1)\}\{6 - d(n-1)\} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \frac{n\{-6 + d(n-1)\}}{2} &= \frac{1}{6}\{-3 + d(n-1)\}\{6 - d(n-1)\} \\ \Leftrightarrow 3n\{-6 + d(n-1)\} &= \{-3 + d(n-1)\}\{6 - d(n-1)\} \\ \Leftrightarrow (3+d)(n-1)(dn-6-d) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで, $3+d \neq 0$ であると仮定すると, 任意の n に対して

$$(n-1)(dn-6-d) = 0$$

が成り立つ必要がある。特に, $n=2, 3$ に対して

$$\begin{aligned} 1 \cdot (d-6) &= 0 \\ \therefore d &= 6 \\ 2 \cdot (2d-6) &= 0 \\ \therefore d &= 3 \end{aligned}$$

が成り立つはずだが, これは矛盾である。したがって,

$$\begin{aligned} d+3 &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -3 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} a_n &= -3 - 3(n-1) \\ &= -3n \end{aligned}$$

となる。ここで $a_N = -2013$ とすると

$$\begin{aligned} -3N &= -2013 \\ \Leftrightarrow N &= 671 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = -3n, N = 671$

〔Ⅲ〕

(1)

$a=0$ から

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin y &= -\sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また $b=\sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \cos y &= \sqrt{3} - \cos x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①, ②を $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入することにより

$$\begin{aligned}\sin^2 x + (\sqrt{3} - \cos x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)\end{aligned}$$

となる。

[1] $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

①, ②から

$$\begin{cases} \sin y = -\frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{11\pi}{6} \quad (\because 0 \leq y < 2\pi)$$

となる。

[2] $x = \frac{11\pi}{6}$ のとき

①, ②から

$$\begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 \leq y < 2\pi)$$

となる。

[1], [2]から求める解は $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ となる。

(答) $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

(2)

$a = -\sqrt{3}$ から

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sin y &= -\sqrt{3} - \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。また $b=1$ から

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos y &= 1 - \cos x \quad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。①, ②を $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入することにより

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3} - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x &= -4 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x &= -1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)\end{aligned}$$

となる。③, ④から

$$\begin{cases} \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{5\pi}{3} \quad (0 \leq y < 2\pi)$$

となり, $(x, y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ となる。

(答) $(x, y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

(3)

$$\begin{aligned}\sin y &= a - \sin x \\ \cos y &= b - \cos x\end{aligned}$$

となるから, $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入することにより

$$\begin{aligned}(a - \sin x)^2 + (b - \cos x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a\sin x + b\cos x &= \frac{a^2 + b^2}{2}\end{aligned}$$

となる。

[1] $a=b=0$ のとき

連立方程式は

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 0 \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$$

となる。これは例えば $x=0, y=\pi$ のとき成立するから解をもつ。

[2] $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ となるから

$$\begin{aligned}a\sin x + b\cos x &= \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\end{aligned}$$

となる。ただし $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である。 $\alpha \leq x + \alpha < 2\pi + \alpha$ から,

$-1 \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq 1$ となることから, $\sin(x + \alpha) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ が解をもつための必要十分条件

である。よって

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\leq 4\end{aligned}$$

となる。これは中心が原点で半径が2の円の周および内部を表す。

逆にこのとき, 同様にして

$$\sin(y + \alpha) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

を得る。 $\sin(x + \alpha) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ と見比べて

$$\begin{aligned}\sin(x + \alpha) &= \sin(y + \alpha) \\ \therefore y &= x + 2n\pi, \pi - (2\alpha + x) + 2n\pi\end{aligned}$$

となる。ただし, n の値は, y の値が $0 \leq y < 2\pi$ を満たすようにとる。このとき,

$$y = \pi - (2\alpha + x) + 2n\pi$$

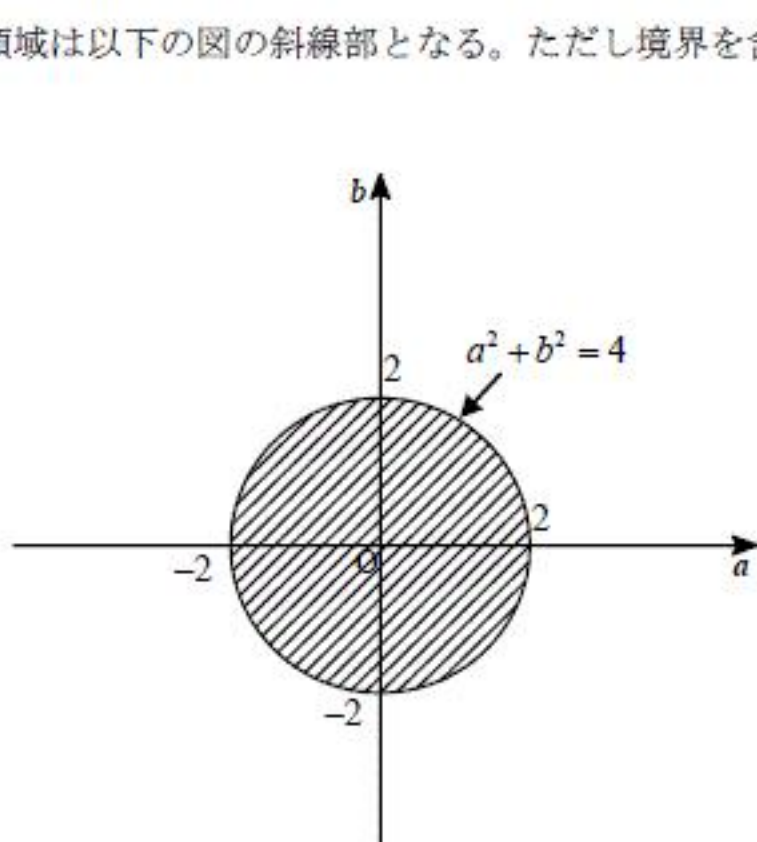
が解となる。実際,

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sin x + \sin\{\pi - (2\alpha + x) + 2n\pi\} \\ &= \sin x + \sin(2\alpha + x) \\ &= 2\sin(x + \alpha)\cos \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \cos x + \cos\{\pi - (2\alpha + x) + 2n\pi\} \\ &= \cos x - \cos(2\alpha + x) \\ &= 2\sin(\alpha + x)\sin \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= b\end{aligned}$$

となる。

[1], [2]から, 求める領域は以下の図の斜線部となる。ただし境界を含む。



(答) 上図