

〔Ⅱ〕

(1)

等比数列なので、

$$q^2 = p \cdot r$$

となる。

(答) $q^2 = p \cdot r$

(2)

(1)の結果を、 $n=1,2,3$ の場合にあてはめて考える。つまり、

$$\cos^2 2\theta = \cos \theta \cdot \cos(3\theta)$$

となるような θ を求める。式を変形して、

$$\begin{aligned} (2\cos^2 \theta - 1)^2 &= \cos \theta \cdot (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \\ \Leftrightarrow 4\cos^4 \theta - 4\cos^2 \theta + 1 &= 4\cos^4 \theta - 3\cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < 2\pi$ なので、これを満たす θ は、 $\theta = \pi$ だけである。

逆に $\theta = \pi$ のとき、

$$a_n = (-1)^n$$

となるので、 a_n は初項 -1 、公比 -1 の等比数列になる。

(答) $\theta = \pi$

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_n \\ \Leftrightarrow \cos\{(n+3)\theta\} &= \cos(n\theta) \end{aligned}$$

について、 $n=1$ のとき成立する必要があるので、 $n=1$ のとき、整数 m を用いて、

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 \\ \Leftrightarrow \cos 4\theta &= \cos \theta \\ \Leftrightarrow 4\theta &= \theta + 2m\pi, -\theta + 2m\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2}{3}m\pi, \frac{2}{5}m\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi \end{aligned}$$

と解くことができる。次にこれらの解の十分性を確かめる。

[1] $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} \cos\left\{(n+3) \cdot \frac{2}{3}\pi\right\} &= \cos\left(\frac{2}{3}n\pi + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right) \end{aligned}$$

となり、成り立っている。

[2] $\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} \cos\left\{(n+3) \cdot \frac{4}{3}\pi\right\} &= \cos\left(\frac{4}{3}n\pi + 4\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{4}{3}n\pi\right) \end{aligned}$$

となり、成り立っている。

[3] $\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき

$$\cos\left\{(n+3) \cdot \frac{2}{5}\pi\right\} = \cos\left(\frac{2}{5}n\pi + \frac{6}{5}\pi\right)$$

となり、 $n=2$ のとき、不成立である。

[4] $\theta = \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$ のとき

同様の計算から、 $\theta = \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$ のときも不成立であるを示すことができる。

以上[1]から[4]までの計算から、題意を満たす θ は、

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

である。

(答) $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

【Ⅲ】

(1)

$$\begin{cases} R+T=E \\ aR+bT=A \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)R=-A+bE \\ (b-a)T=A-aE \end{cases}$$

と変形できる。よって、 $a < b$ より、

$$\begin{cases} R = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2}+b & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2}+b \end{pmatrix} \\ T = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} \frac{11}{2}-a & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2}-a \end{pmatrix} \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{cases} R = xA + yE \\ T = uA + vE \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} R = \begin{pmatrix} \frac{11}{2}x+y & -\frac{5}{2}x \\ -\frac{3}{2}x & \frac{9}{2}x+y \end{pmatrix} \\ T = \begin{pmatrix} \frac{11}{2}u+v & -\frac{5}{2}u \\ -\frac{3}{2}u & \frac{9}{2}u+v \end{pmatrix} \end{cases}$$

と係数比較をすると、

$$x = \frac{-1}{b-a}, y = \frac{b}{b-a}, u = \frac{1}{b-a}, v = \frac{-a}{b-a}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{-1}{b-a}, y = \frac{b}{b-a}, u = \frac{1}{b-a}, v = \frac{-a}{b-a}$$

(2)

$$\begin{aligned} RT &= (xA + yE)(uA + vE) \\ &= xuA^2 + (xv + yu)A + yvE \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)の結果を代入して整理すると、

$$xuA^2 + (xv + yu)A + yvE = \frac{-1}{(b-a)^2} \{A^2 - (a+b)A + abE\}$$

となる。 $RT = O$ となるためには、 $a < b$ より、 $a \neq b$ なので、 $A^2 + (a+b)A + abE = O$ を満たすことが必要十分条件である。また、

$$A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -25 \\ -15 & 24 \end{pmatrix}$$

を代入して、整理すると、

$$\begin{aligned} A^2 + (a+b)A + abE &= O \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 34 & -25 \\ -15 & 24 \end{pmatrix} + (a+b) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + ab \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 34 + (a+b) \cdot \frac{11}{2} + ab = 0 \\ -25 + (a+b) \cdot \frac{-5}{2} = 0 \\ -15 + (a+b) \cdot \frac{-3}{2} = 0 \\ 24 + (a+b) \cdot \frac{9}{2} + ab = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 21 \\ a+b = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

上の連立方程式を得る。 a, b は解と係数の関係に着目すると、 t の二次方程式 $t^2 - 10t + 21 = 0$ の解であるから、 $a < b$ より、 $a = 3, b = 7$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = 3, b = 7$$

(3)

$a = 3, b = 7$ のとき、(1)より、 $x = -\frac{1}{4}, y = \frac{7}{4}, u = \frac{1}{4}, v = -\frac{3}{4}$ となる。よって、

$$R = -\frac{1}{4}A + \frac{7}{4}E = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

である。また、

$$R^2 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = R$$

となる。また、

$$\begin{aligned} TR &= (E - R)R \\ &= R - R^2 \\ &= R - R \\ &= O \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad R = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, R^2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, TR = O$$

(4)

同様に計算して、 $RT = O$ となる。

$TR = RT = O$ であり、 $A^n = (aR + bT)^n$ なので、

$$A^n = (aR + bT)^n = a^n R^n + b^n T^n$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}E = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ T^2 &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

である。よって、 $R^2 = R, T^2 = T$ より、 $R^n = R, T^n = T$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} A^n &= a^n R^n + b^n T^n \\ &= a^n R + b^n T \\ &= 3^n \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 7^n \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 5 \cdot 7^n & 5 \cdot 3^n - 5 \cdot 7^n \\ 3^{n+1} - 3 \cdot 7^n & 5 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 5 \cdot 7^n & 5 \cdot 3^n - 5 \cdot 7^n \\ 3^{n+1} - 3 \cdot 7^n & 5 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n \end{pmatrix}$$

〔Ⅳ〕

(1)

$$f(x) = e^x - (1+x)$$

とする。これを微分して、

$$f'(x) = e^x - 1$$

となる。 $x > 0$ で $f'(x) > 0$ は常に成り立つので、 $x > 0$ において $f(x)$ は単調増加する。ここで、 $f(0) = 0$ となることから、 $x > 0$ の範囲で $f(x) > 0$ は常に成り立つ。したがって、不等式 $e^x > 1+x$ は成り立つ。

(証明終)

(2)

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \cdots \textcircled{1}$$

数学的帰納法を利用して、 $x > 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$e^x > 1+x$$

となり、これは(1)より、 $x > 0$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。つまり、

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$$

となる。

$n=k+1$ のとき

$$f(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right)$$

とする。微分すると、

$$f'(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \right)$$

となり、これは仮定より、 $x > 0$ のとき、 $f'(x) > 0$ となる。つまり、 $f(x)$ は $x > 0$ のとき、単調増加する。また、 $f(0) = 0$ となるので、 $x > 0$ の範囲で $f(x) > 0$ は常に成り立つ。したがって、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上、[1]、[2]より、全ての自然数 n について $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つ。よって、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$ なので、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ である。

$$\text{(答)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$