

【Ⅰ】

【解答】

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ ア} & \cos \theta \quad \text{イ} \quad -\sin \theta \\ & \text{ウ} \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{エ} \quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ & \text{オ} \quad -\sqrt{2} \\ (2) \text{ カ} & -2e^{\frac{1}{4}} \quad \text{キ} \quad 3e^{\frac{1}{4}} \\ & \text{ク} \quad \frac{3}{2} \quad \text{ケ} \quad -3x+\frac{9}{4} \\ & \text{コ} \quad k>0 \end{array}$$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \sin(\beta - \alpha) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 AB の $(1, 1)$ 成分、 $(1, 2)$ 成分はそれぞれ

$$\cos \theta, -\sin \theta$$

である。したがって、点 $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ が AB で表される 1 次変換によって、

点 $P_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$ に移されるとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta) \\ \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できるので

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立てばよい。したがって、

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Leftrightarrow \sqrt{6} = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

であり、また

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha - \beta < 2\pi \\ \Leftrightarrow 0 &< \theta < 2\pi \end{aligned}$$

より

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

と求まる。このとき、行列 AB は反時計回り $\frac{\pi}{6}$ の回転を表す行列となるから

$$\begin{aligned} (AB)^{25} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{25}{6}\pi & -\sin \frac{25}{6}\pi \\ \sin \frac{25}{6}\pi & \cos \frac{25}{6}\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(4+\frac{1}{6}\right)\pi & -\sin\left(4+\frac{1}{6}\right)\pi \\ \sin\left(4+\frac{1}{6}\right)\pi & \cos\left(4+\frac{1}{6}\right)\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= AB \end{aligned}$$

となり、 $(AB)^{25}$ で表される 1 次変換によって点 P_1 が移る点は、点 P_2 である。したがって、

$(AB)^{25}$ で表される 1 次変換によって点 P_1 が移る点の x 座標は

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

である。また、

$$\begin{aligned} -\frac{2013}{6} &= -\frac{2016}{6} + \frac{3}{6} \\ &= -336 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \left((AB)^{-1}\right)^{2013} &= (AB)^{-2013} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(-366+\frac{1}{2}\right)\pi & -\sin\left(-366+\frac{1}{2}\right)\pi \\ \sin\left(-366+\frac{1}{2}\right)\pi & \cos\left(-366+\frac{1}{2}\right)\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $\left((AB)^{-1}\right)^{2013}$ で表される 1 次変換によって点 P_1 が移る点を (X, Y) とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\left((AB)^{-1}\right)^{2013}$ で表される 1 次変換によって点 P_1 が移る点の x 座標は、

$$-\sqrt{2}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2ax+b)e^{-x^2} + (ax^2+bx)e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= (-2ax^3-2bx^2+2ax+b)e^{-x^2} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ が $x = \frac{1}{2}$ で極大値をとるとき、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + a + b\right)e^{-\frac{1}{4}} &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{3}{2}a \left(\because e^{-\frac{1}{4}} > 0\right) \end{aligned} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。これを $f(x)$ に代入すると、

$$f(x) = a\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)e^{-x^2}$$

と表せる。このとき極大値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}} &= 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}a &= 1 \\ \therefore a &= -2e^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $\textcircled{3}$ より、

$$b = 3e^{\frac{1}{4}}$$

と求まる。これから、

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)e^{-x^2+\frac{1}{4}} \\ &= -x(2x-3)e^{-x^2+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x) > 0$ となる x の範囲は、

$$\begin{aligned} -x(2x-3)e^{-x^2+\frac{1}{4}} &> 0 \\ \Leftrightarrow x(2x-3) &< 0 \left(\because e^{-x^2+\frac{1}{4}} > 0\right) \\ \therefore 0 &< x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求まる。 $g(x) = \log f(x)$ と表されるとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{-2 \cdot (-2)x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-2)x + 3\}e^{-x^2+\frac{1}{4}} \\ &= (4x^3 - 6x^2 - 4x + 3)e^{-x^2+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\log f(x))' \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{4x^3 - 6x^2 - 4x + 3}{-2x^2 + 3x} \end{aligned}$$

と表される。したがって、 $y = g(x)$ の点 $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= g'(1)(x-1) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{4-6-4+3}{-2+3}(x-1) - \frac{3}{4} \\ &= -3(x-1) - \frac{3}{4} \\ &= -3x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。次に $y = g(x)$ と $y = k$ が共有点を持たない k の値を求める。

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4x^3 - 6x^2 - 4x + 3}{-2x^2 + 3x} \\ &= \frac{(2x-1)(2x^2-2x-3)}{-x(2x-3)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

と求まるが、 $y = g(x)$ の定義域は、 $0 < x < \frac{3}{2}$ であるから、上の解のうちこの範囲内にあるも

のは、

$$x = \frac{1}{2}$$

だけである。

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \log 1 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} g(x) = -\infty \end{aligned}$$

より、 $0 < x < \frac{3}{2}$ における $y = g(x)$ の増減表は下記の通りである。

x	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	$\left(\frac{3}{2}\right)$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$(-\infty)$

よって、 $y = g(x)$ のグラフの概形は下記の通りである。



以上より、 $y = g(x)$ と $y = k$ が共有点を持たないような k の範囲は、

$$k > 0$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} = 0$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OP}} &= (\cos \theta) \overrightarrow{\text{OA}} + (1 - \sin \theta) \overrightarrow{\text{OB}} \\ &= \cos \theta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \sin \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos \theta - \sin \theta + 1 \\ \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{\text{OP}} = (x, y)$ とおくとき、

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta - \sin \theta + 1 & \dots \textcircled{1} \\ y = \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \Leftrightarrow 2x + y = 5 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \Leftrightarrow 2y - x = 5 \sin \theta - 5$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

であるから、③、④より、

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \right)^2 + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 5\end{aligned}$$

と求まる。したがって、点 P の軌跡は、中心 B(1, -2)、半径 $\sqrt{5}$ の円である。

(答) 中心 B(1, -2)、半径 $\sqrt{5}$ の円

(3)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{OA}}| &= \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} \\ |\overrightarrow{\text{OB}}| &= \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{\text{PA}} &= (1 - \cos \theta) \overrightarrow{\text{OA}} - (1 - \sin \theta) \overrightarrow{\text{OB}} \\ \overrightarrow{\text{PB}} &= -(\cos \theta) \overrightarrow{\text{OA}} + (\sin \theta) \overrightarrow{\text{OB}}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= (1 - \cos \theta)(-\cos \theta) |\overrightarrow{\text{OA}}|^2 + \{(1 - \cos \theta) \sin \theta + (1 - \sin \theta) \cos \theta\} \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} \\ &\quad - (1 - \sin \theta)(\sin \theta) |\overrightarrow{\text{OB}}|^2 \\ &= 5 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 5 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta \quad (\because \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} = 0) \\ &= 5 - 5(\cos \theta + \sin \theta) \\ &= 5 - 5\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、

$$-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

であるから、 $\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}}$ は、

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi, \text{ すなわち } \theta = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき, 最大値 } 5(\sqrt{2} + 1)$$

をとる。

(答) 最大値: $5(\sqrt{2} + 1)$ ($\theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき)

【Ⅲ】

(1)

$y = \cos^3 x$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= -3\cos^2 x \sin x \end{aligned}$$

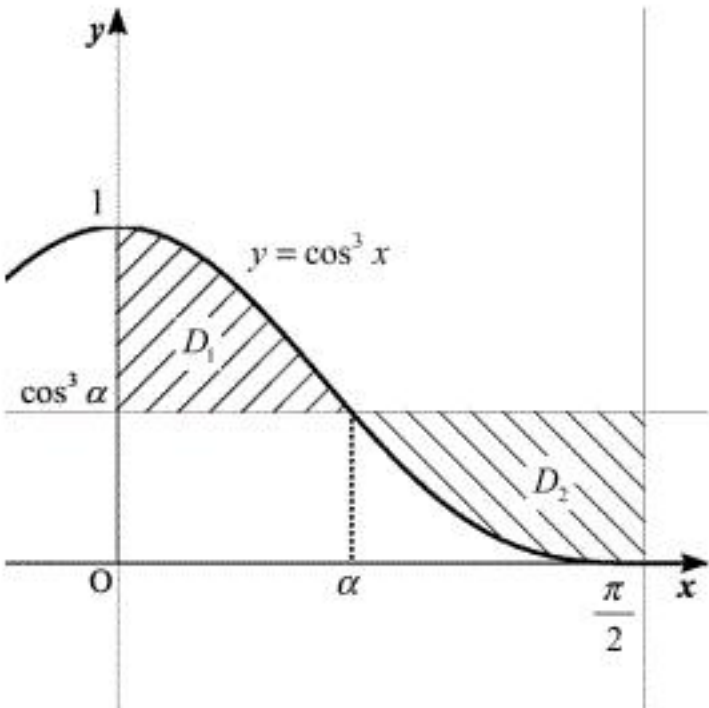
であるから、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y' \leq 0$ が成り立つので、 $y = \cos^3 x$ は単調減少する。また、

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$0 < \cos^3 \alpha < 1$$

である。したがって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $y = \cos^3 x$ と $y = \cos^3 \alpha$ は 1 点でのみ交わるので

$y = \cos^3 x$ と $y = \cos^3 \alpha$ の位置関係は下図の通りである。



3 倍角の公式より、

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \therefore \cos^3 x &= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \end{aligned}$$

である。 D_1, D_2 の範囲は上図の通りであるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha (\cos^3 x - \cos^3 \alpha) dx \\ &= \int_0^\alpha \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \right) dx - \alpha \cos^3 \alpha \\ &= \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x \right]_0^\alpha - \alpha \cos^3 \alpha \\ &= \frac{1}{12}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin \alpha - \alpha \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \alpha - \cos^3 x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos^3 \alpha - \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x \right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos^3 \alpha - \left(\frac{1}{12}\sin \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{4}\sin \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{12}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin \alpha \\ &= \frac{1}{12}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と表せる。 $S_1 = S_2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin \alpha - \alpha \cos^3 \alpha &= \frac{1}{12}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cos^3 \alpha &= \frac{2}{3} \\ \therefore \cos \alpha &= \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \cos \alpha = \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

(2)

$$f(\alpha) = S_1 + S_2$$

とおく。(1)より、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{6}\sin 3\alpha + \frac{3}{2}\sin \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1}{2}\cos 3\alpha + \frac{3}{2}\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \cdot 3\cos^2 \alpha \cdot (-\sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) + \frac{3}{2}\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha - 3\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &= 3\left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。また、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ では、

$$f'(\alpha) < 0$$

が成り立ち、 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ では、

$$f'(\alpha) > 0$$

が成り立つので、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ における $f(\alpha)$ の増減表は下記の通りである。

α	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		-	0	+	
$f(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{6}\sin \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\sin \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1+9-4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{10-4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-4}{6} \end{aligned}$$

であるから、 $S_1 + S_2$ は $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき、最小値 $\frac{5\sqrt{2}-4}{6}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } \frac{5\sqrt{2}-4}{6} \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ のとき} \right)$$

【Ⅳ】

(1)

$y' = \frac{1}{x}$ より、点 A における法線の傾きは $-a$ であるから、点 A における法線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -a(x-a) + \log a \\ &= -ax + a^2 + \log a \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad y = -ax + a^2 + \log a$$

(2)

点 B における $y = \log x$ の接線の傾きが $\frac{1}{a+h}$ であることから、点 B における $y = \log x$ の法線の方程式は、

$$y = -(a+h)x + (a+h)^2 + \log(a+h) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。したがって、①、②の交点が点 D であるから、

$$\begin{aligned} -ax + a^2 + \log a &= -(a+h)x + (a+h)^2 + \log(a+h) \\ \Leftrightarrow hx &= 2ah + h^2 + \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\ \therefore x &= h + 2a + \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) \quad (\because h \neq 0) \end{aligned}$$

となるので、これを①に代入して、

$$\begin{aligned} y &= -a\left\{h + 2a + \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right)\right\} + a^2 + \log a \\ &= -a^2 - ah - \frac{a}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) + \log a \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$(\alpha, \beta) = \left(h + 2a + \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right), -a^2 - ah - \frac{a}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) + \log a\right)$$

である。

$$\text{(答)} \quad \alpha = h + 2a + \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right), \beta = -a^2 - ah - \frac{a}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) + \log a$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} &= (\log a)' \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

であるから、(2)より、

$$\begin{aligned} p &= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{h + 2a + \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right)\right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{h + 2a + \frac{\log(a+h) - \log a}{h}\right\} \\ &= 0 + 2a + \frac{1}{a} \\ &= 2a + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} q &= \lim_{h \rightarrow 0} \beta \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{-a^2 - ah - \frac{a}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) + \log a\right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{-a^2 - ah - a \cdot \frac{\log(a+h) - \log a}{h} + \log a\right\} \\ &= -a^2 - 0 - a \cdot \frac{1}{a} + \log a \\ &= -a^2 + \log a - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p = 2a + \frac{1}{a}, q = -a^2 + \log a - 1$$

(4)

まず、点 A は $y = \log x$ 上の点であるから、

$$a > 0$$

である。

AE が最小となるとき、 AE^2 も最小となるので、 AE^2 が最小となる a を求めればよい。

$g(a) = AE^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(a) &= \left(2a + \frac{1}{a} - a\right)^2 + \left(-a^2 + \log a - 1 - \log a\right)^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + (a^2 + 1)^2 \\ &= a^4 + 3a^2 + 3 + \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g'(a) &= 4a^3 + 6a - \frac{2}{a^3} \\ &= \frac{2(a^2 + 1)^2(2a^2 - 1)}{a^3} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} g'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 1 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ のとき、

$$(a^2 + 1)^2 > 0, a^3 > 0$$

であるから、 $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、

$$g'(a) < 0$$

が成り立ち、 $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、

$$g'(a) > 0$$

が成り立つ。したがって、 $g(a)$ の増減表は下表の通りである。

a	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 3 + 2 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $g(a)$ は

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき、最小値 } \frac{27}{4}$$

をとる。以上より、AE は

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき、最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

をとる。

$$\text{(答)} \quad \text{最小値: } \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき})$$