

〔Ⅱ〕

(1)

$AB=BC \Leftrightarrow AB^2=BC^2$ であるので

$$a^2+1^2+(4-2)^2=(x-a)^2+(y-1)^2+2^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-1)^2=a^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2y=0$$

となる。

$$(答) \ x^2+y^2-2ax-2y=0$$

(2)

$$\overrightarrow{AB}=(a, 1, -2), \overrightarrow{BC}=(x-a, y-1, -2)$$

であり、この2つのベクトルが直交するということは、内積が0になるので、

$$a(x-a)+y-1+4=0$$

$$\Leftrightarrow ax+y=a^2-3$$

となる。

$$(答) \ ax+y=a^2-3$$

(3)

(1)(2)より、 $x^2+y^2-2ax-2y=0 \cdots \textcircled{1}$ と $ax+y=a^2-3 \cdots \textcircled{2}$ を同時にみたすような実数 x, y が存在するように、 a を設定すればよい。

ここで、 $\textcircled{1}$ は

$$x^2+y^2-2ax-2y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-1)^2=a^2+1$$

と変形でき、中心 $(a, 1)$ 、半径 $\sqrt{a^2+1}$ の円である。したがって、中心と $\textcircled{2}$ の直線との距離が半径以下であれば、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を同時にみたす実数 x, y が存在し、そのときの a の範囲が求める答えである。つまり、

$$\frac{|a \cdot a+1-a^2+3|}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sqrt{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{a^2+1}} \leq \sqrt{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq a^2+1$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq a^2$$

である。ここで、 a は正の実数であるから、

$$a \geq \sqrt{3}$$

である。

$$(答) \ a \geq \sqrt{3}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$y = a^x$ において,

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^1 y^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 a^{2x} dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x \log a} dx \\ &= \frac{\pi}{2 \log a} (a^2 - 1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{2 \log a} (a^2 - 1)$$

(2)

$y = a^{2x}$ において,

$$\begin{aligned} W(a) &= \pi \int_0^1 y^2 dx - V(a) \\ &= \pi \int_0^1 a^{4x} dx - V(a) \\ &= \frac{\pi}{4 \log a} \{a^4 - 1 - 2(a^2 - 1)\} \\ &= \frac{\pi}{4 \log a} (a^4 - 2a^2 + 1) \\ &= \frac{\pi}{4 \log a} (a^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4 \log a} (a^2 - 1)^2$$

(3)

(1)と(2)より,

$$\begin{aligned} V(a) &= W(a) \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 2 &= a^4 - 2a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 3)(a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $a > 1$ であるので,

$$a = \sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \sqrt{3}$$

(4)

$$\begin{aligned} &\lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{W(a)}{a-1} \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{(a+1)^2 (a-1)}{\log a} \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{a-1}{\log a} \cdot (a+1)^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ であるので,

$$\textcircled{1} = \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi$$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6\sin^2 t \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -3k \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-k \cos t}{2 \sin t}$$

$$= -\frac{k}{2 \tan t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{k}{2 \tan t}$$

(2)

まず,

$$\begin{cases} p = 2 \sin^3 t_0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ q = k \cos^3 t_0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

であり, 接線 $x+y=1$ より接線の傾きが -1 であるので, (1) より,

$$-\frac{k}{2 \tan t_0} = -1$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \tan t_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。また, このときの接線は,

$$y = \frac{dy}{dx}(x-p) + q$$

$$= -\frac{k}{2 \tan t_0} x + \frac{k}{2 \tan t_0} p + q$$

となるので, これと $x+y=1$ より,

$$\frac{k}{2 \tan t_0} p + q = 1$$

となり, ①, ②, ③を代入すると,

$$2 \sin^3 t_0 + 2 \tan t_0 \cos^3 t_0 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin t_0 (\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin t_0 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

となる。よって,

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4} \\ q = \frac{3}{4} \\ k = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{3}{4}$$

$$k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$t_0 = \frac{\pi}{6}$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 2t + 2 \cos 2t + 1) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + \cos 4t}{2} + 2 \cos 2t + 1 \right) dt$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4t + 4 \cos 2t + 3) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4t + 2 \sin 2t + 3t \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{64} (9\sqrt{3} + 4\pi)$$

となる。また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t (1 - \sin^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4t \cos 2t + 4 \cos^2 2t + 3 \cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} \cos 6t + \frac{1}{2} \cos 2t + 4 \times \frac{1 + \cos 4t}{2} + 3 \cos 2t \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt + \frac{1}{16} \left[\frac{1}{12} \sin 6t + \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{7}{4} \sin 2t + 2t \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

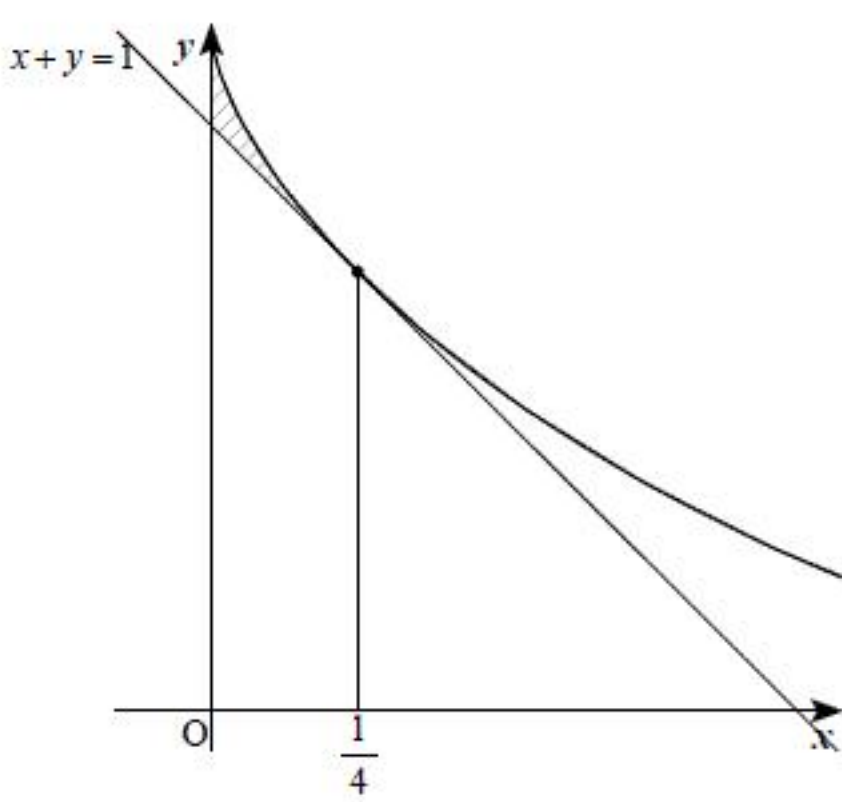
$$= \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{5}{96} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt = \frac{1}{64} (9\sqrt{3} + 4\pi)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 t dt = \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{5}{96} \pi$$

(4)



求める面積は上図の斜線部であるので,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \{y - (-x+1)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} y dx + \int_0^{\frac{1}{4}} (x-1) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となり, ここで,

$$x = 2 \sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 6 \sin^2 t \cos t$$

x	$0 \rightarrow \frac{1}{4}$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

となるので,

$$\textcircled{4}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos^3 t \cdot 6 \sin^2 t \cos t dt + \left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= 4\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt - \frac{7}{32}$$

となる。ここで, (3)より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6 t dt = \frac{\pi}{96}$$

であるので, 求める面積は,

$$\frac{\sqrt{3}}{24} \pi - \frac{7}{32}$$

となる。