

〔1〕

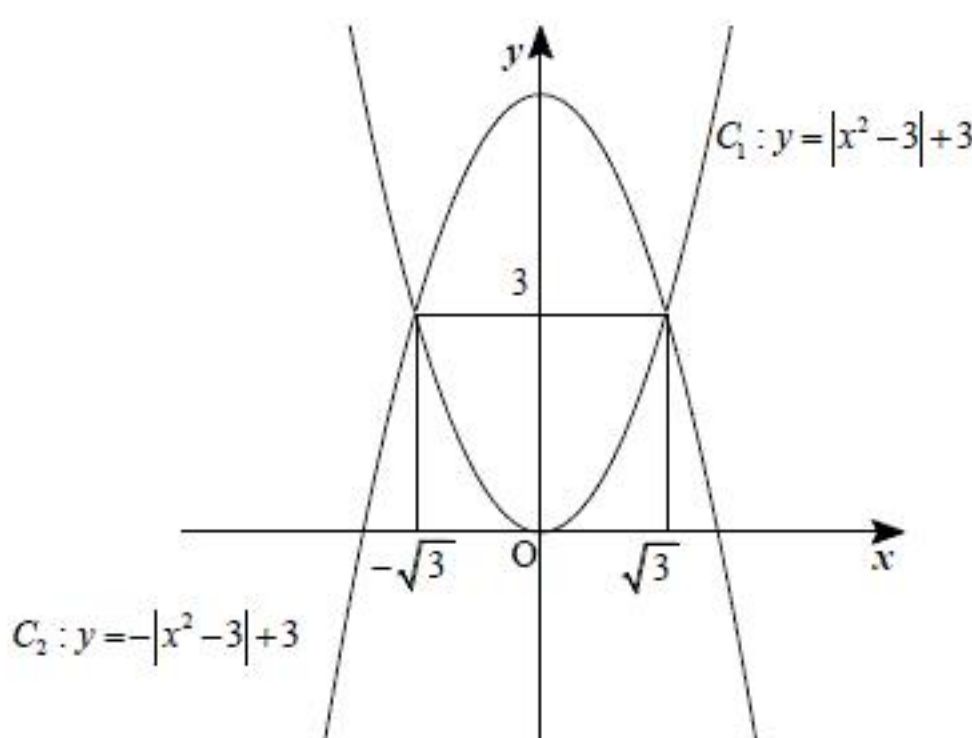
【解答】

- (1) ア $\sqrt{3}$ イ $8\sqrt{3}$ ウ $\frac{28\sqrt{7}}{3}-8\sqrt{3}$
- (2) エ $\frac{5}{108}$ オ $\frac{1}{24}$ カ $\frac{19}{27}$
- (3) キ $4\cos^3\theta-3\cos\theta$ ク $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ ケ $4a^3-3a$
 コ $8a^4-8a^2+1$

【解説】

(1)

図を描くと以下ようになる。



$y = x^2$, $y = -x^2 + 6$ の交点を考えればよいので、第 1 象限にある交点は $(\sqrt{3}, 3)$ となる。

また、囲まれた面積は、

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 6 - x^2) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

となる。次に、 $y = -x^2 + 6$ と $y = -1$ で囲まれる面積を求める。交点の x 座標は $\pm\sqrt{7}$ となる。よって、その面積は

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} (-x^2 + 7) dx = \frac{\{\sqrt{7} - (-\sqrt{7})\}^3}{6} = \frac{28\sqrt{7}}{3}$$

となる。したがって、求める面積は

$$\frac{28\sqrt{7}}{3} - 8\sqrt{3}$$

となる。

(2)

3 個のサイコロの出た目の場合の数は、 $6^3 = 216$ 通りある。出た目の和が 6 となる組み合わせは、

$$(1, 2, 3), (1, 1, 4), (2, 2, 2)$$

である。よって、並べ替えたものも考えると、全部で

$$6 + 3 + 1 = 10 \text{ 通り}$$

ある。ゆえに、求める確率は、

$$\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

となる。出た目の積が 6 になる組み合わせは

$$(1, 2, 3), (1, 1, 6)$$

であり、並べ替えたものも考えると、

$$6 \times 1 + 3 \times 1 = 9 \text{ 通り}$$

ある。よって、求める確率は、

$$\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

となる。また、積が 3 の倍数にならない確率は、3 つの目がすべて 1, 2, 4, 5 のどれかであればよいので

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。よって、求める確率は、

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ \cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1\end{aligned}$$

となるので、

$$\cos 33^\circ = 4a^3 - 3a$$

$$\sin 46^\circ = \cos 44^\circ = 8a^4 - 8a^2 + 1$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 |t-1|(t+1)dt \\ &= -\int_0^1 (t-1)(t+1)dt \\ &= -\int_0^1 (t^2-1)dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(1)=\frac{2}{3}$

(2)

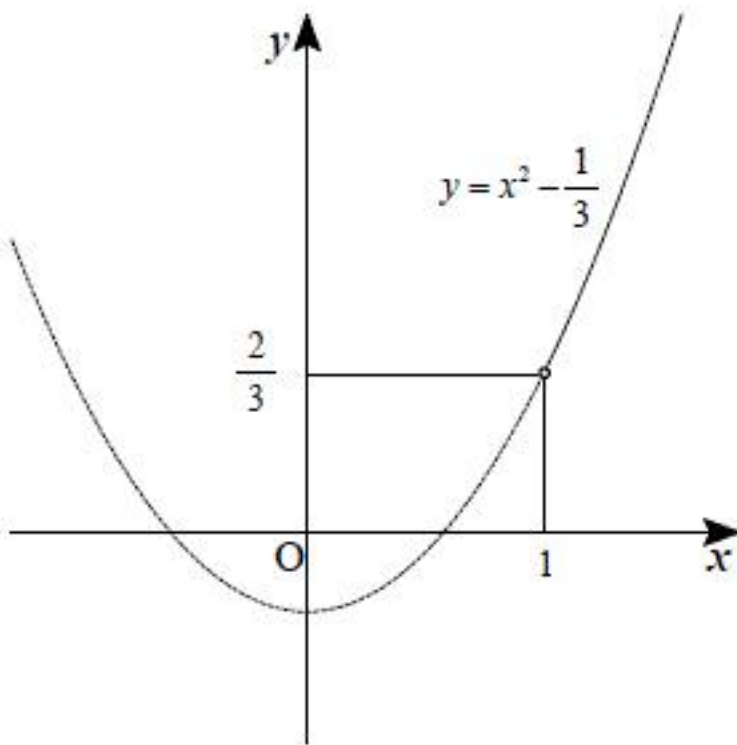
$x>1$ のとき、 $0\leq t\leq 1$ では、

$$|t-x| = -(t-x)$$

であるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_0^1 (t^2-x^2)dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_0^1 \\ &= x^2-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となるので、図示すると下図のようになる。



(答)前図

(3)

$0\leq x\leq 1$ のとき、 $0\leq t\leq x$ では、

$$|t-x| = -(t-x)$$

となる。また、 $x<t\leq 1$ では、

$$|t-x| = t-x$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_0^x (t^2-x^2)dt + \int_x^1 (t^2-x^2)dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_x^1 \\ &= x^3-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}-x^2+x^3-\frac{1}{3}x^3 \\ &= \frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

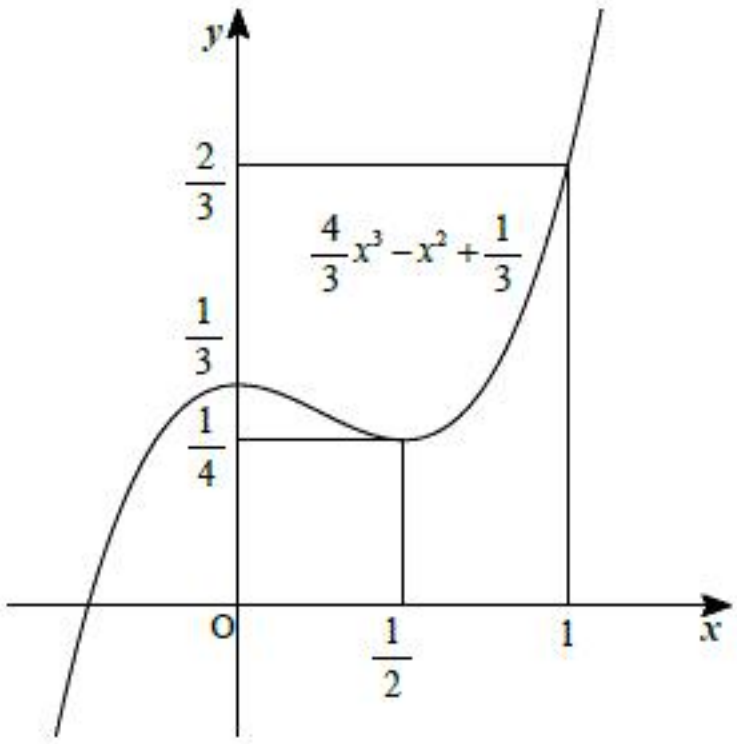
となるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^2-2x \\ &= 2x(2x-1) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$		↘	$\frac{1}{4}$	↗	

よってグラフを図示すると、下図のようになる。



(答)前図

(4)

(3)より、求める最小値は $\frac{1}{4}$ であり、その時の x の値は $\frac{1}{2}$ である。

(答) $x=\frac{1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{1}{4}$

〔Ⅲ〕

(1)

$\triangle OAB$ は一辺の長さが1であるので、 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。また、 $\triangle ACD$ は一辺の長さが u であり、 OB と AD は平行であるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \left(\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u\right) \\ &= u\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b}$$

となる。また、

$$\overrightarrow{BC} = (1+u)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{BC} = (1+u)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

(2)

まず、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}$$

であるので、(1)より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (1+u)\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + u(1+u)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - u\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(u^2 + u - 1) \\ &= \frac{1}{2}(u^2 + u + 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(u^2 + u + 1)$$

(3)

ある実数 s, t を用いて、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{a} + us\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} = (1+u)t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} \end{cases}$$

とおけるので、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} s = (1+u)t \\ us = 1-t \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} s = \frac{u+1}{u^2+u+1} \\ t = \frac{1}{u^2+u+1} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{u+1}{u^2+u+1}\overrightarrow{a} + \frac{u^2+u}{u^2+u+1}\overrightarrow{b}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{u+1}{u^2+u+1}\overrightarrow{a} + \frac{u^2+u}{u^2+u+1}\overrightarrow{b}$$

(4)

点 G は $\triangle OAB$ の重心なので、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{3}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} &= \frac{u+1}{3(u^2+u+1)}(\overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \\ &= \frac{u+1}{3(u^2+u+1)}\left(1+u+\frac{1+u}{2}\right) \\ &= \frac{(u+1)^2}{2(u^2+u+1)} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、(3)より、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{u+1}{u^2+u+1}\overrightarrow{OD}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 &= \frac{(u+1)^2}{(u^2+u+1)^2}(u^2+u+1) \\ &= \frac{(u+1)^2}{u^2+u+1} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。よって、①と②より、

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$$

である。

$$(答) \quad \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$$

(5)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG} \\ \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GP}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OG} + \left|\overrightarrow{OG}\right|^2\end{aligned}$$

となり、(4)の結果より、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{GP}\right|^2 &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GP}\right| &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \left|\overrightarrow{GP}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$