

2013年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ.

- (1) 初項 $a_1 = 1$, 公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ がある. 数列 $\{a_n\}$ の項のうち, 値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列は等差数列をなし, 初項は ア , 公差は イ となる. したがって 49 以下の a_n のうち整数とならない項の総和は ウ となる. 次に初項 $b_1 = 2$, 公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ を考える. 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を, 小さい方から順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とすると, 数列 $\{c_n\}$ は等差数列となり, 初項は エ , 公差は オ となる.
- (2) 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x + e^x \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) は $x =$ カ のとき極値をとる. したがって $x =$ キ のとき最小値 ク をとり, $x =$ ケ のとき最大値 コ をとる.

〔 II 〕 n を 1 以上の整数とし, θ を $0 < \theta < 2\pi$ を満たす定数とする. 数列 $\{a_n\}$ が $a_n = \cos(n\theta)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) p, q, r がこの順に等比数列となるとき, q^2 を p と r を用いて表せ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるような θ の値を全て求めよ.
- (3) 1 以上の全ての整数 n に対して $a_{n+3} = a_n$ が成り立つような θ の値を全て求めよ.

〔Ⅲ〕 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ とする. 行列 R, T と実数 a, b ($a < b$) は

$$R + T = E, aR + bT = A \quad (E \text{ は単位行列})$$

を満たすものとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $R = xA + yE, T = uA + vE$ となる実数 x, y, u, v を a, b を用いて表せ.
- (2) $RT = O$ (O は零行列) となる a, b を求めよ.
- (3) (2) で定まる a, b について R, R^2 と TR をそれぞれ求めよ.
- (4) (2) で定まる a, b について A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

〔Ⅳ〕 次の問いに答えよ. ただし n を自然数とする.

- (1) $x > 0$ のとき, 不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ.
- (2) $x > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.