

2013年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ。

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$ ($0 < \beta < \alpha < 2\pi$) の積 AB の $(1, 1)$ 成分は $\theta = \alpha - \beta$ を用いて表すと ア となり、 $(1, 2)$ 成分は θ を用いて表すと イ となる。ここで点 $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ が AB で表される 1 次変換によって点 $P_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$ に移るとすると $\theta =$ ウ となる。このとき、 $(AB)^{25}$ で表される 1 次変換によって点 P_1 が移る点の x 座標は エ となり、 $((AB)^{-1})^{2013}$ で点 P_1 が移る点の x 座標は オ となる。

- (2) 関数 $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x^2}$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大値 1 をとるとする。このとき、 $a =$ カ , $b =$ キ であり、 $f(x) > 0$ を満たす範囲は $0 < x <$ ク となる。この区間で関数 $g(x) = \log f(x)$ を考える。曲線 $C: y = g(x)$ の点 $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ における接線の方程式は $y =$ ケ となり、曲線 C と直線 $y = k$ が共有点をもたない k の値の範囲は コ となる。

〔Ⅱ〕 O を原点とする座標平面に点 $A(2, 1)$ と点 $B(1, -2)$ をとる。実数 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して点 P は $\overrightarrow{OP} = (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (1 - \sin \theta)\overrightarrow{OB}$ を満たすものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。
- (2) θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす値をとって変化するとき、点 P の軌跡を求めよ。
- (3) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最大値と、そのときの θ の値を求めよ。

〔Ⅲ〕 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする. xy 平面において, 曲線 $C: y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), 直線 $l: y = \cos^3 \alpha$ および y 軸で囲まれた図形を D_1 とする. また, 曲線 C , 直線 l および 直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を D_2 とする. 次の問いに答えよ.

(1) D_1 の面積 S_1 と D_2 の面積 S_2 が等しくなるとき, $\cos \alpha$ の値を求めよ.

(2) S_1 と S_2 の和の最小値を求めよ.

〔Ⅳ〕 xy 平面において, 曲線 $C: y = \log x$ 上に 2 点 $A(a, \log a)$ と $B(a+h, \log(a+h))$ ($h \neq 0$) をとる. 点 A における C の法線と点 B における C の法線の交点を $D(\alpha, \beta)$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 点 A における法線の方程式を求めよ.

(2) α と β をそれぞれ a と h を用いて表せ.

(3) $p = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha$ と $q = \lim_{h \rightarrow 0} \beta$ とする. p と q をそれぞれ a を用いて表せ.

(4) 点 E の座標を (p, q) とする. 線分 AE の長さを最小にする a の値と, そのときの線分 AE の長さを求めよ.